

2010年2月8日(月) 小池

※ 以下の問題の解答では、単位換算に注意して計算過程と説明を必ず付与すること。

問(1): 以下の文章の空欄に相応しい用語あるいは文字式を記入しなさい。

温度とは物体の熱さ冷たさを表す概念である。物体は外部の影響を受けなければ、十分な時間が経過すると全体が一様な温度の定常的な熱平衡状態となる。物体Aと物体Bが熱平衡にあり、物体Bと物体Cが熱平衡にあるならば、物体Aと物体Cも熱平衡にある。これを熱力学第0法則という。

熱力学で使用する状態量とは、温度 T や圧力 p , 体積 V などの系の状態を記述する物理量である。理想気体の状態方程式とは $pV = nRT$ と定式化されている。

巨視的には静止している体系でも、微視的には分子は相互作用しながらランダムな熱振動をしている。熱振動する運動エネルギーと分子間力の位置エネルギーの総和を内部エネルギー dU という。この内部エネルギーを考慮すれば熱現象を含む過程に対してもエネルギー保存の法則が成立する。すなわち、系が外界から熱量と仕事 W を受け取るとき、内部エネルギーの増加を ΔU , 力学的エネルギーを ΔE とすれば、 $\Delta U + \Delta E = Q + W$ の関係式が成立する。これを熱力学第1法則という。また、準静的過程において系になされる微小な仕事は $dW = -p dV$ なので、この熱力学第1法則は、 $dU = dQ - p dV$ とも表すことができる。

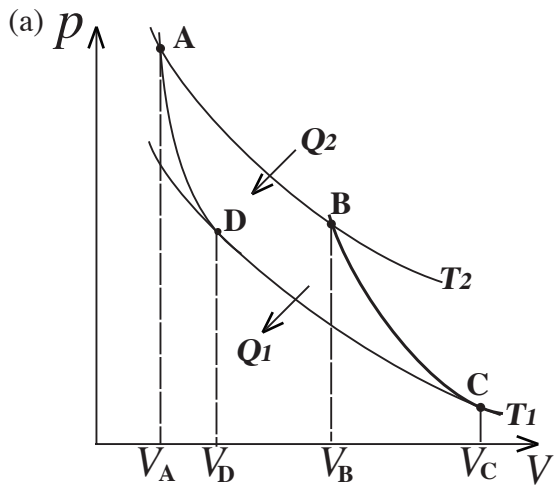
カルノーサイクルとは別名「可逆サイクル」と呼ばれ、最も良く熱を仕事に変えることができる仮想的な熱機関(サイクル)である。したがって、このサイクルに仕事 W を与え、逆回転して運転できるので、低温源 T_1 から熱を奪い、高温源 T_2 へ熱を廃熱する冷凍機やクーラーとなったり、さらに熱ポンプとしても動作する。この場合に、クラジウスの関係式と呼ばれる $Q_1/T_1 = Q_2/T_2 = W/(T_2 - T_1)$ が成立する。

熱力学第2法則とはクラジウスの原理(熱は低温側から高温側へひとりでに移動しない)やトムソンの原理(熱はひとりでに力学的な仕事に変えられない)にも示されているように、身の周りの物理現象が時間の流れを逆にしたら実現不可能な不可逆な現象であることを示したものである。具体的な現象としては、摩擦(熱)を伴う力学過程や高温から低温側への熱伝導、そして水の中のインクの拡散などが挙げられる。

エントロピーとは状態量の一つであるが、可逆過程ならば、ある状態から別の状態への過程によらず、クラジウスの関係式から、 $dS = dQ/T$ と定義される。一方、閉じた系の不可逆過程において、 $dS \geq 0$ となる。これをエントロピー増大の法則という。

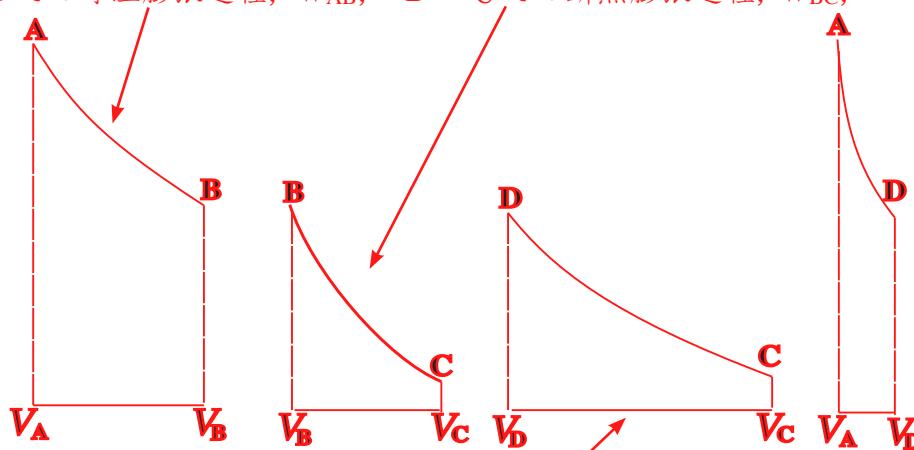
裏に続く

問 (2) : 以下のカルノーサイクルの $p-V$ 線図に関して以下の問題に答えなさい.



(a) $p-V$ 線図の各過程 (○ → △) の名称とそのときの仕事 $W_{\text{○} \rightarrow \text{△}}$ の面積を図示せよ.

$A \rightarrow B$ での等温膨張過程, W_{AB} , $B \rightarrow C$ での断熱膨張過程, W_{BC} ,



$C \rightarrow D$ での等温圧縮過程, W_{CD} , $D \rightarrow A$ での断熱圧縮過程, W_{DA}

問(2): 以下のカルノーサイクルの $p-V$ 線図に関して以下の問題に答えなさい。

(b) 上の4つの過程での仕事である W_{AB} , W_{BC} , W_{CD} , W_{DA} を状態量を使って示しなさい。
モル数を n とし, 気体定数を R , 定容熱容量を C_V とすること。

$$\begin{aligned} dU &= dQ - W = dQ - pdV \\ dU &= C_V dT \\ dT &= 0, dU = 0 \\ dQ &= W \\ dQ &= pdV \\ W_{AB} &= \int dQ = \int pdV = nRT_2 \int_A^B \frac{1}{V} dV = nRT_2 [\log V]_A^B \\ &= nRT_2 (\log V_B - \log V_A) = \underline{nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A}} \\ (p &= \frac{nRT}{V}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dU &= dW = c_v dt \\ dQ &= 0 \\ -W_{BC} &= \int_{T_2}^{T_1} c_v dt = c_v (T_1 - T_2) \\ W_{BC} &= \underline{c_v (T_2 - T_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT &= 0, dU = 0 \\ dQ &= -dW = -pdV \\ W_{CD} &= -\int dQ = -\int pdV = -nRT_1 \int_C^D \frac{1}{V} dV = -nRT_1 [\log V]_C^D \\ &= -nRT_1 (\log V_D - \log V_C) = \underline{nRT_1 \log \frac{V_C}{V_D}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dU &= dW = c_v dt \\ dQ &= 0 \\ W_{DA} &= \int_{T_1}^{T_2} c_v dt = c_v (T_2 - T_1) \\ W_{DA} &= \underline{c_v (T_2 - T_1)} \end{aligned}$$

(c) またカルノーサイクルが1周のするときの仕事 W を W_{AB} , W_{BC} , W_{CD} , W_{DA} で示しなさい。

$$\begin{aligned} W &= \underline{W_{AB} + W_{BC} - W_{CD} - W_{DA}} \\ W_{BC} &= W_{DA} \\ W_{AB} - W_{CD} &= Q_2 - Q_1 \end{aligned}$$

(d) 状態量を使って W を表しなさい。必ず $V_B/V_A = V_C/V_D$ とすること。
なお, この仕事は $W = Q_2 - Q_1$ とも書ける。

$$\begin{aligned} W &= Q_2 - Q_1 \\ &= nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} - nRT_1 \log \frac{V_C}{V_D} \\ &= nR(T_2 - T_1) \log \frac{V_B}{V_A} \\ \frac{V_B}{V_A} &= \frac{V_C}{V_D} \end{aligned}$$

※ 以下の問題の解答では、単位換算に注意して計算過程と説明を必ず付与すること。

問(3)：屋外が $T_1 = 0^\circ\text{C}$ のとき、熱ポンプ (逆カルノーサイクル) で、室内を $T_2 = 25^\circ\text{C}$ にするために、単位時間当たりの電力 (仕事) が $W = 50 \text{ W}$ 必要であった。このときに以下の問題に答えなさい。なお、建物は屋外と断熱されているとする。また、熱量は $Q_1/T_1 = Q_2/T_2 = W/(T_2 - T_1)$ の関係式を用いて求めること。

(a) 熱ポンプが屋内へ放出しなければならない熱量 Q_2 (W) を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{T_1} &= \frac{Q_2}{T_2} = \frac{W}{T_2 - T_1} \\ Q_2 &= \frac{T_2}{T_2 - T_1} W = \frac{(273+25)}{(273+25)-(273+0)} \times 50 \\ &= \frac{298}{298-273} \times 50 \\ &= 596 \text{ W} \end{aligned}$$

左の2段目の式を
 $Q_2 = WT_2/(T_2 - T_1)$
とs修正して下さい。

(b) 屋外から取り込む熱量 Q_1 (W) を求めよ。

$$Q_1 = Q_2 - W = 596 - 50 = 546 \text{ W}$$

(c) 熱ポンプ係数 ν の定義式と値を示せ。

$$\nu = \frac{Q_2}{W} = \frac{596}{50} = 11.92$$

問(4)：断熱膨張によって、単位時間当たりに $W = 10$ 万 kW の仕事を取り出せる蒸気タービンを使った火力発電所の効率について考える。高温源の温度を $T_2 = 700\text{K}$ とし、低温源の温度が $T_1 = 300\text{K}$ のとき、以下の問題に答えなさい。

(a) 効率 $\eta = 57\%$ (カルノーサイクルの効率と同じとする) のとき、このタービンが 10 万 kW の仕事をするのに必要な単位時間当たりの熱量 Q_2 (kJ/s) を求めよ。

$$Q_2 = \frac{1 \times 10^5}{0.57} = 1.754 \times 10^5 \text{ kJ/s}$$

(b) この熱量 Q_2 を得るために、燃焼熱が $Q_{\text{oil}} = 4 \times 10^4 \text{ kJ/kg}$ である重油を用いるとすると、重油の単位時間当たりの消費量 l_{oil} (kg/s) を求めよ。

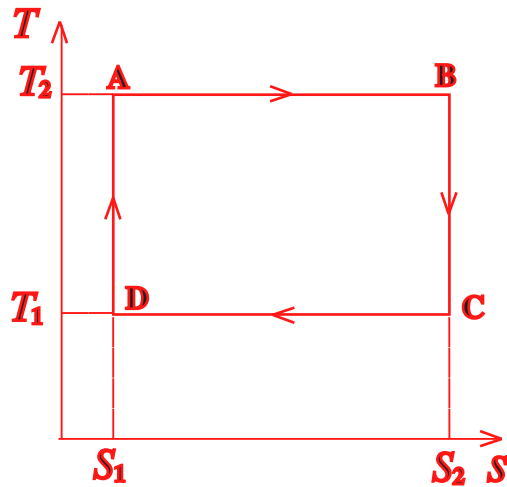
$$l_{\text{oil}} = \frac{1.754 \times 10^5}{4 \times 10^4} = 4.39 \text{ kg/s}$$

(c) 1 年間の重油の消費量 L_{oil} (t) を求めよ。

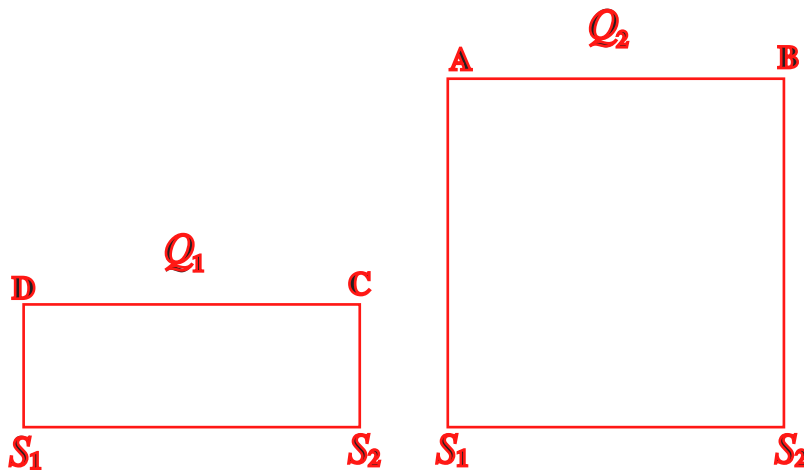
$$\begin{aligned} L_{\text{oil}} &= 4.39 \times 3600 \times 24 \times 365 = 1.384 \times 10^8 \text{ kg} \\ &= 1.384 \times 10^5 \text{ t} \\ &= 14 \text{ 万 t} \end{aligned}$$

※ 以下の問題の解答では、単位換算に注意して計算過程と説明を必ず付与すること。

(e) このカルノーサイクルの $T-S$ 線図を描きなさい。



(f) $A \rightarrow B$ と $C \rightarrow D$ 過程で移動する熱量は、それぞれ Q_2 , Q_1 である。これらの熱量を意味する2つの面積を図示しなさい。なお、 $A \rightarrow B$ と $C \rightarrow D$ 過程での温度をそれぞれ T_2 と T_1 とし、 $B \rightarrow C$ と $D \rightarrow A$ 過程でのエントロピーをそれぞれ S_2 と S_1 とする。



(g) このカルノーサイクルの効率は $\eta = W/Q_2$ である。 η を熱量だけで示しなさい。

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

(h) 熱量 Q_1 と Q_2 をエントロピーと温度を使って示しなさい。

$$Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$$

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$$

(i) このカルノーサイクルの効率 η を温度のみで示しなさい。

$$\eta = 1 - \frac{T_1(S_2 - S_1)}{T_2(S_2 - S_1)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

※ 以下の問題の解答では、単位換算に注意して計算過程と説明を必ず付与すること。

問(5)：質量 $m_i = 0.45 \text{ kg}$ で温度 $T_i = 0^\circ\text{C}$ の氷を質量 $m_w = 2.8 \text{ kg}$ で温度 $T_w = 27^\circ\text{C}$ の水の中に入れるとき以下の質問に答えなさい。ここで、氷の融解熱を $Q_i = 334 \text{ kJ/kg}$ として、水の比熱を $c_w = 4.18 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ とする。

(a) 氷が水に溶けるまでに必要な熱量 ΔQ_1 (kJ) を求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= m_i \times Q_i = 0.45 \times 334 = 150.3 \text{ kJ} \\ &= 150.3 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

(b) 氷が水に溶けて終温度 T まで温度上昇するときの熱量 ΔQ_2 (kJ) を求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= m_i c_w (T - T_i) = 0.45 \times 4.18 \times (T - 273) \text{ kJ} \\ &= 0.45 \times 4.18 \times (T - 273) \times 10^3 \\ &= 1.881 \times (T - 273) \text{ kJ} = 1.881 \times 10^3 \times (T - 273) \text{ J} \end{aligned}$$

(c) 水が終温度 T まで低下するときの熱量 ΔQ_3 (kJ) を求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta Q_3 &= m_w c_w (T_w - T) \\ &= 2.8 \times 4.18 \times (27 + 273 - T) \text{ kJ} \\ &= 11.704 \times 10^3 \times (300 - T) \text{ J} \end{aligned}$$

(d) 系の終温度 T (K) をエネルギーバランスの式 $(\Delta Q_1 + \Delta Q_2) = \Delta Q_3$ の関係から求めよ。

$$\begin{aligned} 150.3 \times 10^3 + 1.881 \times (T - 273) &= 2.8 \times 4.18 \times (27 + 273 - T) \\ T &= \frac{150.3 - 513.5 - 3511.2}{-(1.881 + 11.704)} \\ &= 285.2 \text{ K} \\ &= 12^\circ\text{C} \end{aligned}$$

(e) (a) の問題で示したように T_i (K) のまま、氷が水に溶けるまでに ΔQ_1 (kJ) が必要である。このときのエントロピーの変化量 ΔS_1 を示し、さらにその値を kJ/K 単位で求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{\Delta Q}{T_i} \\ &= \frac{m_i Q_i}{T_i} = \frac{0.45 \times 334}{273} \\ &= 0.55 \text{ kJ/K} \end{aligned}$$

(f) 氷が水に溶けて終温度 T まで温度上昇するときのエントロピーの変化量 ΔS_2 は $m_i \cdot c_w \log(T/T_i)$ となることを導き、その値を kJ/K 単位で求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= m_i \int_{T_i}^T \frac{c_w dT}{T} \\ &= m_i c_w \log \frac{T}{T_i} = 0.45 \times 4.18 \log \frac{285}{273} \\ &= 8.09 \times 10^{-2} \text{ kJ/K} \end{aligned}$$

(g) 水が終温度 T まで低下するときのエントロピーの変化量 ΔS_3 は $m_w \cdot c_w \log(T/T_w)$ となることを導き、その値を kJ/K 単位で求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= m_w \int_{T_w}^T \frac{c_w dT}{T} \\ &= m_w c_w \log \frac{T}{T_w} = 2.8 \times 4.18 \times \log \frac{285}{300} \\ &= -0.6 \text{ kJ/K} \end{aligned}$$

積分範囲は T_w から T までです。修正をして下さい。また、エントロピーは減少しますのでマイナスです。

(h) 系全体のエントロピーの変化量 ΔS を kJ/K 単位で求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \\ &= 0.55 + 8.09 \times 10^{-2} - 0.6 \\ &= 0.031 \text{ kJ/K} \end{aligned}$$