数学C・中間試験問題（午後クラス・令和元年１１月２０日）

15

問１．（１）$\sqrt{3}+i$ を極形式で表せ。 10

（２）$(\sqrt{3}+i)^{12}$ をもとめよ。 5

問２ 次の連立１次方程式を解け。
30

$$(1)\quad \begin{cases} 3x_1+11x_2+4x_3=1 \\ x_1+3x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+7x_2+2x_3=3 \end{cases}, \qquad (2)\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1-x_2-x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}.$$

15 15

問３． 次の行列のランクを求めよ。

20

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 10

15

問４． 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。

（１）$2A-B+3C$ 5

（２）$AB-BA$ 5

（３）C^{-1} 5

20

問５． 行列 $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。

（１）P^{-1} 5

（２）$P^{-1}AP$ 5

（３）$(P^{-1}AP)^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 5

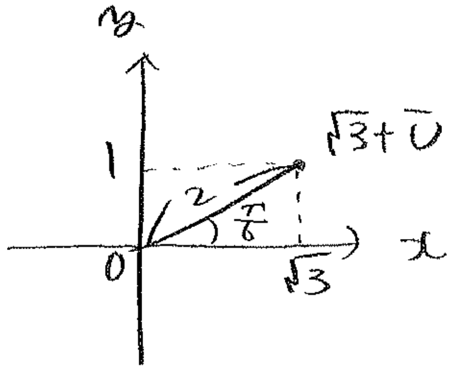
（４）A^n $(n=1,2,3,\cdots)$ 5

数C 2019 (午後クラス) 解答例.

問1.

(1) $\sqrt{3}+i$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$



(2) $(\sqrt{3}+i)^{12}$

$=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{12}$

$=2^{12}\left(\cos\frac{12}{6}\pi+i\sin\frac{12}{6}\pi\right)$

$=2^{12}=4096$

問2.

(1) 拡大係数行列を行基本変形する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&11&4&1\\1&3&2&2\\2&7&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-3② \\ ③-2②}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&-2&-5\\1&3&2&2\\0&1&-2&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①\leftrightarrow②]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&2\\0&2&-2&-5\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-3③ \\ ②-2③}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&8&5\\0&0&2&-3\\0&1&-2&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&8&5\\0&1&-2&-1\\0&0&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-4③ \\ ②+③}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&17\\0&1&0&-4\\0&0&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}③]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&17\\0&1&0&-4\\0&0&1&-\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

つまり $\begin{cases}x=17\\y=-4\\z=-\frac{3}{2}\end{cases}$

(2) 拡大係数行列を変形する.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-2\times① \\ ③+① \\ ④-①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[④\times(-\frac{1}{2})]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-3\times④ \\ ②+4\times④ \\ ③-2\times④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①-2③]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①\times\frac{1}{2} \\ \text{など}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = \frac{1}{2} \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = t$ とおくと

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t:\text{任意})$$

問3　A: ランク = 3

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{①+③ \\ ②+③}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{①-② \\ ③+②}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto[③+①]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{①+③ \\ \text{など}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B: ランク = 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{①\times\frac{1}{2} \\ ②+③ \\ ④+2\times③}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{②-3\times① \\ ④-3\times①}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[③-2\times①]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問4.

(1) $2A-B+3C$

$$=2\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&0\\2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3\\-3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&11\end{pmatrix}$$

(2) $AB-BA$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&4\\1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&6\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-2\\0&2\end{pmatrix}$$

(3) $$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

問5

(1) $P^{-1} = \frac{1}{-3+4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(3) $(P^{-1}AP)^n = \underline{\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

(4) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP$

$= P^{-1}A^nP$

$\therefore A^n = P \times (P^{-1}AP)^n \cdot P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n & 2\cdot 3^n \\ -2\cdot 2^n & -1\cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \underline{\begin{pmatrix} -3\cdot 2^n + 4\cdot 3^n & -6\cdot 2^n + 6\cdot 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & +4\cdot 2^n - 3\cdot 3^n \end{pmatrix}}$