数学C・中間試験問題（午前クラス・令和元年１１月２０日）

15

問１．（１）$1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。 10

（２）$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{12}$ をもとめよ。 5

問２ 次の連立１次方程式を解け。 30

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$, 15 (2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$. 15

問３． 次の行列のランクを求めよ。 20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 10

問４． 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。 15

（１）$2A - 3C$ 15

（２）$AB - BA$ 5

（３）C^{-1} 5

20 **問５**． 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。

（１）P^{-1} 5

（２）$P^{-1}AP$ 5

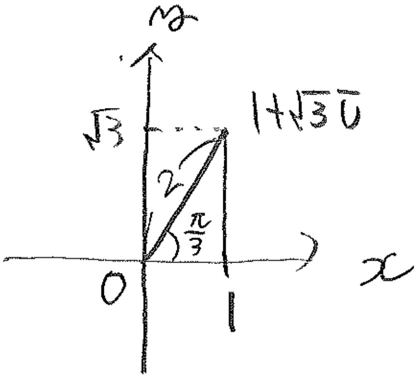
（３）$(P^{-1}AP)^n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 5

（４）$A^n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 5

数C 2019（午前クラス）解答例

問1. (1) $1+\sqrt{3}i$

$$= \underline{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$



(2) $(1+\sqrt{3}i)^{12}$

$$= 2^{12}\left(\cos\frac{12}{3}\pi+i\sin\frac{12}{3}\pi\right)$$

$$= 2^{12} = \underline{4096}$$

問2

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & -7 & 11 \\ 2 & -1 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}-3\times\text{①}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}+\text{②}]{\text{③}+3\times\text{②}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1-4x_3=2 \\ x_2-x_3=-1 \end{cases}$$

$x_3=t$ とおく.

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

（t：任意）

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

② −2×①
③ +①
④ −①

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longmapsto$$

④ $\times(-\frac{1}{2})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longmapsto$$

① −3×④
② +4×④
③ −2×④

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longmapsto$$

① − 2③

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longmapsto$$

① $\times\frac{1}{2}$
など.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = \frac{1}{2} \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = t$ とおくと

$$\left(\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{array}\right.$$

(t: 任意)

問3

A：ランク = 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{\text{①}-2\times\text{②} \\ \text{③}-2\times\text{②}}]{} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\text{①}\times\frac{1}{5}]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{\text{②}+2\times\text{①} \\ \text{③}-3\times\text{①}}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{\text{③}\times\frac{1}{2} \\ \text{など}}]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よってランクは $\underline{3}$

B：ランク = 2

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{\text{①}+4\times\text{③} \\ \text{②}+\text{③}}]{} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 26 & 13 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{\text{①}-13\times\text{④} \\ \text{②}-5\times\text{④} \\ \text{③}-5\times\text{④}}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よってランクは $\underline{2}$

問4.

(1) $2A-3C$

$$=2\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&0\\2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-2&3\\5&0\end{pmatrix}}$$

(2) $AB-BA$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&4\\1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&6\\1&3\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-2&-2\\0&2\end{pmatrix}}$$

(3) $$C^{-1}=\frac{1}{4-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}$$

5

問5

(1) $$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) $$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

(4) $$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP\,P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP$$

$$= P^{-1}A^nP$$

$$\therefore\ A^n = P\,(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 2^n + 5^n & -2\cdot 2^n + 2\cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix}$$