数学II・２０１９・期末試験（７月２５日）

20 **問１．** $V = \mathbf{R}$ とする。ベクトル空間 V から V への写像 $f : V \to V$ および $g : V \to V$ を、以下のように定める。

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = x^2.$$

次の問いに答えよ。

（１）f は線形写像かどうか、理由を付して答えなさい。 10

（２）g は線形写像かどうか、理由を付して答えなさい。 10

30 **問２．** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）A の固有多項式 $g_A(t) = |tE_2 - A|$． 5

（２）A の全ての固有値 λ． 10

（３）各固有値 λ に対する A の固有空間 $W(\lambda; A) = \{x \in \mathbf{R}^2 | Ax = \lambda x\}$． 10

（４）A^n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$． 5

30 **問３．** 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）B の固有多項式 $g_B(t) = |tE_3 - B|$． 5

（２）B の全ての固有値 λ． 10

（３）各固有値 λ に対する B の固有空間 $W(\lambda; B) = \{x \in \mathbf{R}^3 | Bx = \lambda x\}$． 10

（４）B に対し変換行列 P を求め、B を対角化しなさい． 5

20 **問４．** $M(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \middle| x, y, z, w \in \mathbf{R} \right\}$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．ただし $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とする．$M(2, \mathbf{R})$ から $M(2, \mathbf{R})$ への線形写像 $T_A : X \to AX$ の表現行列を、基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して求めなさい．

問1.

(1) fは線形写像である。

実際、

(i) $f(x_1+x_2) = 2(x_1+x_2)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \parallel$　　$(x_1, x_2 \in V)$
$f(x_1)+f(x_2) = 2x_1+2x_2$

(ii) $f(cx) = 2(cx)$
$\qquad\qquad\qquad \parallel$　　$(c \in \mathbb{R}, x \in V)$
$cf(x) = c(2x)$

が成立している。

(2) gは線形写像ではない。

(i) $g(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nparallel$
$g(x_1)+g(x_2) = x_1^2 + x_2^2$
$(x_1, x_2 \neq 0$ のとき$)$

(ii) $g(cx) = (cx)^2$
$\qquad\qquad\quad \nparallel$
$c\,g(x) = cx^2$　　$(c \neq 1$ のとき$)$

問2.

(1) 固有多項式 $|tE_2 - A|$

$$= \begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)(t-4) - 3$$

$$= t^2 - 6t + 8 - 3 = \underline{t^2 - 6t + 5}$$

(2) $t^2 - 6t + 5 = (t-5)(t-1) = 0$ より、

固有値は $\underline{\lambda = 1, 5}$

(3) 固有空間

$$W(1; A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = x\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (A - E_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$ 略解

$$W(5;A) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = 5x \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| (A-5E_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$ 略解

(4)

$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく、

$$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = \overbrace{P^{-1}A\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{E_2}A\underbrace{P \cdots}_{E_2} \underbrace{\cdots P^{-1}}_{E_2}AP}^{n}$$

$$= P^{-1}A^nP$$

$$\therefore \; P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & -3+3\cdot 5^n \\ -1+3\cdot 5^n & 1+3\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

問3、

(1) 固有多項式

$|tE_3 - B|$

$$= \begin{vmatrix} t-1 & -3 & 0 \\ -1 & t+1 & 0 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(t+1)\begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -1 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)\{(t-1)(t+1)-3\}$$

$$= (t+1)(t^2-4)$$

$$= \underline{(t+1)(t-2)(t+2)}$$

(2) $|tE_3 - B| = (t+1)(t-2)(t+2) = 0$ より,

固有値は, $\underline{\lambda = \pm 2, -1}$

(3) 固有空間

$$W(-1;B) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = -x\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$ 略解

$$W(2;B) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 2x\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(-2;B) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = -2x\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

(4)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

問4.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

とおく。

$$T_A(e_1)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=ae_1+ce_2$$

$$T_A(e_2)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=be_1+de_2$$

$$T_A(e_3)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=ae_3+ce_4$$

$$T_A(e_4)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=be_3+de_4$$

$$T_A(e_1,e_2,e_3,e_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\left|\begin{array}{cccc}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{array}\right|$$

表現行列は、

$$\left(\begin{array}{cc|c}a&b&\\c&d&O\\\hline &O&\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\end{array}\right)$$