数学II・２０１９・中間試験（６月２１日）

問１．次の連立１次方程式を解きなさい。 10

$$
\begin{aligned}
2x - 4y - z &= 3\\
x - 2y - z &= 2\\
3x - 6y - 2z &= 5.
\end{aligned}
$$

10

問２．次の行列式を計算しなさい。ただし a は定数である。 30

$$
\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}.
$$

10 10 10

問３．次の行列 A の逆行列を求めなさい。 20

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.
$$

20

問４．ベクトル空間 $V = \mathbf{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める。 20

$$
W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{matrix} \right\}.
$$

（１）W は V の部分ベクトル空間であることを示しなさい。 10

（２）W の次元 $\dim W$ を求めなさい。 10

20

問５．$V = \mathbf{R}[x]$ を x の多項式全体のなすベクトル空間とする。多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を以下で定める。

$$
f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad f_2(x) = 1 + x^2 + 2x^3, \quad f_3(x) = x - x^3.
$$

（１）多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ の組は一次独立か調べなさい。 10

（２）多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ で生成される V の部分ベクトル空間 W の次元 $\dim W$ を求めなさい。

10

問1.

拡大係数行列を変形する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[③-3②]{①-2②} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②+①]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

方程式に書きなおすと、

$$x-2y=1,\ z=-1$$

よって　$y=s$　とおけば、

$$\begin{cases} x = 1+2s \\ y = s \\ z = -1 \end{cases} \quad (s\text{はパラメタ})$$

問2.

・ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2)(-2) = 1 - 4 = \underline{-3}$

・ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-2① \\ ③-①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-3)(-1) = \underline{-3}$

・ $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{①-a③ \\ ②-③}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$

$= (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1+a & 1-a^2 \\ a+1 & -1-a \end{vmatrix}$

$= -(1+a)^2 - (1-a^2)(a+1)$

$= \underline{(a+1)^2(a-2)}$

問3、

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}-2\text{②} \\ \frac{1}{2}\text{③}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{②}-2\text{③} \\ \text{①}\times(-1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{③}+\text{①}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = (E_3|A^{-1})$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

問4

(1) ① $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in W$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$ かつ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 - 2y_4 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$ かつ

$$(x_1+y_1) + (x_2+y_2) - (x_3+y_3) - 2(x_4+y_4) = 0$$
$$-(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) + (x_3+y_3) - (x_4+y_4) = 0$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in W$

② $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}$ かつ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$ かつ

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 - 2\alpha x_4 = 0 \\ -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$

①,②が成立するので、

Wは部分ベクトル空間。

(2)

1次方程式

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3-2x_4&=0\\
-x_1+2x_2+x_3-x_4&=0
\end{aligned}
$$

を解く.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[②+①]{}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[\frac{1}{3}②]{}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[①-②]{}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
x_1-x_3-x_4&=0\\
x_2-x_4&=0
\end{aligned}
$$

$x_3=s,\ x_4=t$ とおくと,

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cancel{-1} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

よって

$$W=\left\{ s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| s,t\in\mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は1次独立なので、

$\underline{\dim W = 2}$

問5.

(1) $f_2(x)+f_3(x)$

$= 1+x+x^2+x^3 = f_1(x)$

よって $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は $\underline{\text{1次独立ではない。}}$

(2) $f_2(x), f_3(x)$ は1次独立.

実際 $c_2f_2(x)+c_3f_3(x)$

$= c_2+c_3x+c_2x^2+(2c_2-c_3)x^3=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_2=0 \\ c_3=0 \\ 2c_2-c_3=0 \end{cases} \Longleftrightarrow c_2=c_3=0$$

No. 8

$$W = \{ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) \mid c_2, c_3 \in \mathbb{R} \}$$

$f_2(x), f_3(x)$は1次独立なので

$\dim W = 2$