微積分解法・期末試験（令和元年７月２４日）

問１．次の不定積分を求めなさい。
20

$$\int \frac{1}{x\ \log x}dx, \quad \int x \cos x dx.$$

10 10

問２．次の不定積分を誘導に従い求めなさい。
20

$$I = \int \frac{1}{x(x+1)^2}dx.$$

（１）有理関数 $\frac{1}{x(x+1)^2}$ の部分分数展開を求めなさい。 10

（２）I を求めよ。 10

問３．次の不定積分を求めなさい。
20

$$I = \int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}dx.$$

問４．次の定積分を求めなさい。
20

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$$

問５ 次の微分方程式を解きなさい。
20

$$\frac{dy}{dx} = ky(1-y).$$

ただし、k は定数とする。

微積分解法 2019　解答例.

問1.

・$I=\int \dfrac{dx}{x\log x}$

$y=\log x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$I=\int \dfrac{dy}{y}=\log|y|+C=\underline{\log|\log x|+C}$

・$I=\int x\cos x\,dx$

$u=x \qquad u'=1$

$v'=\cos x \qquad v=\sin x$

$I=x\sin x-\int \sin x\,dx$

$=\underline{x\sin x+\cos x+C}$

問2.

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$

$=\dfrac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$

$A+B=0,\ 2A+B+C=0,\ A=1$

$\Longleftrightarrow$

$A=1,\ B=-1,\ C=-1$

よって

$\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)
$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$
$$= \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$
$$= \underline{\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C}$$

問3.
$$I = \int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\, dx$$
$y = \sin x$ とおく.
$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$I = \int \frac{d\theta}{2+\theta^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$z = \frac{y}{\sqrt{2}}$ とおく.
$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\, dz}{1+z^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Arctan}(z) + C$$
$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) + C}$$

問4.
$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$$
$x = \sin\theta$ とおく.
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$
$x : 0 \mapsto 1$
$\theta : 0 \mapsto \frac{\pi}{2}$
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{16}}$$

問5

$$\frac{dy}{dx} = ky(1-y)$$

$$\frac{1}{y(1-y)}\frac{dy}{dx} = k$$

$$\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = k\int dx \quad \cdots(☆)$$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy$$

$$= \log|y| - \log|1-y| + c' = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + c'$$

(☆)は、

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right|C'' = kx \qquad (\log C'' = c')$$

$$\therefore \underline{\frac{y}{1-y} = Ce^{kx}} \qquad (C = \pm 1/C'')$$

$$\therefore \underline{y = \frac{Ce^{kx}}{1+Ce^{kx}}}$$