微積分解法・中間試験（平成３１年６月１９日）

20

問１．次の極限を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}.$$

10　10

20

問２．　次の極限を求めなさい。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+\cos(x^2)}{x^2}.$$

10　10

20

問３．　関数 $f(x)=|x|$ について、以下の問いに答えよ。

（１）関数 $f(x)$ は原点 $x=0$ で連続であるかを調べなさい。　10

（２）関数 $f(x)$ は原点 $x=0$ で微分可能であるかを調べなさい。　10

30

問４．　関数 $f(x)=x^x$, $g(x)=\mathrm{Arcsin}(x)+\mathrm{Arctan}(3x)$, および $h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ について、以下の問いに答えなさい。ただし、a,b,c,d は定数とする。

（１）$f(x)$, $g(x)$ の導関数を求めなさい。　10　10

（２）$h(x)$ の n 階導関数を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$　10

10

問５ 関数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $g(x)=\frac{1}{(1-x)^4}$ について、以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。　5

(2) $g(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。　5

問1. ・ $\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$$= \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = 1$$

・ $\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$

$$= \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$$

問2. ・ $x=-t \quad (t>0)$ で $x<0$ を表す。

$$\frac{|x|}{x} = \frac{|-t|}{-t} = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x} = -1$$

・ $|\sin(x^2)|\leq 1,\ |\cos(x^2)|\leq 1$ であるから、

$$0\leq\frac{|\sin(x^2)+\cos(x^2)|}{x^2} \leq \frac{|\sin(x^2)|+|\cos(x^2)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$ であるから、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+\cos(x^2)}{x^2} = 0$$

問3. (1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.

よって

$f(x)$ は $x=0$ で連続.

(2) $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \frac{|-k|}{-k} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} (-1) = -1.$$

$k=-h$ とおいた.

$1 \neq -1$ であるから.

$f(x)$ は $x=0$ で微分不可能、

問4. (1) $f(x) = x^x = e^{x\log x}$

$$f'(x) = e^{x\log x}(\log x + 1)$$
$$= (\log x + 1)x^x$$

$$g(x) = \mathrm{Arsin}(x) + \mathrm{Arctan}(3x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+(3x)^2}$$

(2) $$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$h'(x) = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$h'(x) = (-2)\frac{c}{(cx+d)^3}(ad-bc)$$

$$h''(x) = (-2)(-3)\frac{c^2}{(cx+d)^4}(ad-bc)$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n!\frac{c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} \quad (n=1,2,\cdots) \cdots (☆)$$

と予想される。

帰納法で示す。

$n=1$ はOK、

ある n まで正しいと仮定する。

$$h^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}n!\,c^{n-1}(ad-bc)(-n-1)\frac{c}{(cx+d)^{n+2}}$$

$$= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)!\,c^n(ad-bc)}{(cx+d)^{n+2}}$$ となり,

仮定(☆)は正しいことが示された。

問5、 $|x|<1$ で、

(1)

$$f(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \cdots (☆)$$

となることを示す。

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n \quad \cdots (☆☆)$$ が成立,

なぜなら、両辺に $(1-x)$ をかければ

左辺 $= (1-x^{n+1})$

右辺 $= (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$

$$\begin{aligned} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n \\ &\quad\;\, -x-x^2-\cdots-x^n-x^{n+1} \\ &= 1-x^{n+1} \end{aligned}$$

となり 左辺 = 右辺。

(☆☆)が成立。

(☆☆)で $n\to\infty$ とすれば $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} \to 0$

よって $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ が成立。

(1) の式 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ を x について微分する.

・ $$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

・ $$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

・ $$\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)'=\left(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\right)'$$

$$\frac{3!}{(1-x)^4}=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

よって $$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}x^n$$