数学Ｉ・２０１９・期末試験（７月２５日）

15

問１ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく。$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。偏導関数 $g_r, g_\theta, g_{r\theta}$ を偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表しなさい。

5 5 5

問２ 次の積分を計算しなさい。

20

$$I = \int\int_D x^2y^2 dxdy.$$

ただし、$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \middle| 0 \le x + y \le 1,\ x, y \ge 0\right\}$.

20

問３ 次の累次積分の積分順序を交換しなさい。ただし、$f(x,y)$ は連続関数とする。

20

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy\right) dx, \quad \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x,y)dy\right) dx.$$

10 10

25

問４（１）極座標変換 $(x,y) = (r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta)$ のヤコビアン $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めなさい。

（２）次の積分を計算しなさい。

5

$$I = \int\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy.$$

ただし、$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \, x^2 + y^2 \le 1\}$.

20

20

問５ 極座標変換 $(x,y,z) = (r\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ r\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ r\ \cos\theta)$ を活用して、次の積分を計算しなさい。

$$I = \int\int\int_D xyz(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz.$$

ただし、$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x, y, z \ge 0\}$. ただし、$R > 0$ とする。

数I 解答例

問1. Chain-Ruleにより、（$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$）

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\underline{\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

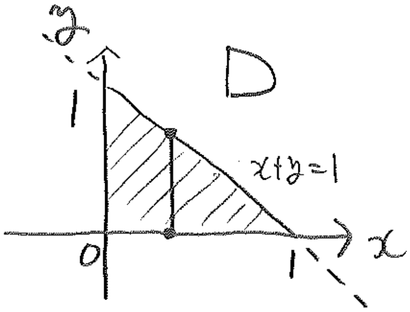
$$\underline{\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}r\cos\theta\right) \\
&\quad + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\cos\theta\right) \\
&= \underline{-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)} \\
&\quad \underline{+ r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}
\end{aligned}$$

なお f : C^2 なので $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ になることを用いた。

問2.

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$$
$$= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

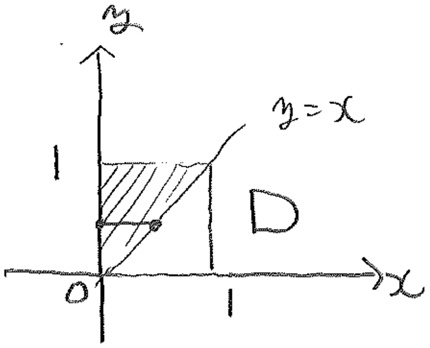


Iを累次積分で表すと、

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 \, dy \, dx$$
$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3} x^2 (1-x)^3 \, dx$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) \, dx$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \underline{\frac{1}{180}}$$

問3.

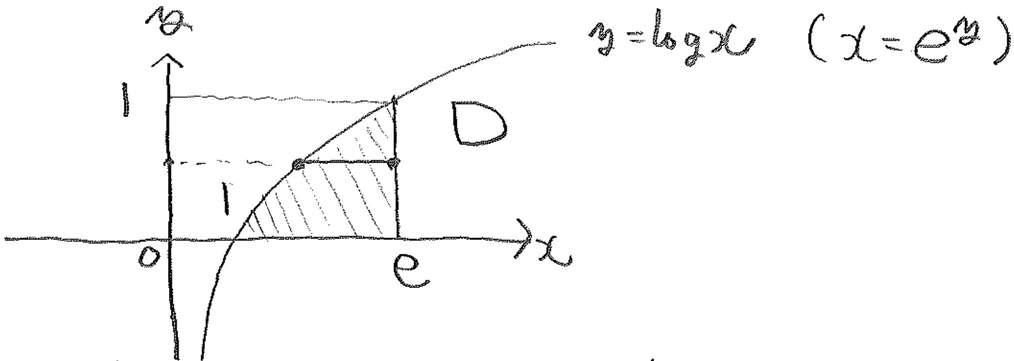
$$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\}$$
$$=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq y\}$$



よって

$$\int_0^1\left(\int_x^1 f(x,y)\,dy\right)dx=\underline{\int_0^1\left(\int_0^y f(x,y)\,dx\right)dy}$$

$$D=\{(x,y)\mid 1\leq x\leq e,\ 0\leq y\leq \log x\}$$
$$=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ e^y\leq x\leq e\}$$



$$\int_1^e\left(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\right)dx=\underline{\int_0^1\left(\int_{e^y}^e f(x,y)\,dx\right)dy}$$

問4.

(1) ヤコビアン $= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \underline{r}$

(2)

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ に変数変換すると、

$$I = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \times r \; drd\theta$$

$$= \iint_{\tilde{D}} r^2 \, drd\theta$$

ただし、$\tilde{D} = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
積分が変数分離しているので、

$$I = \int_0^1 r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\pi}$$

問5.

ヤコビアンは $r^2\sin\theta$ であるので、
極座標に変換すると、

$$I = \iiint_{\tilde{D}} r^7 \sin^3\theta\cos\theta \times \cos\varphi\sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

ただし、$\tilde{D} = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$
積分が変数分離しているので、

$$I = \int_0^R r^7 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{=\frac{1}{2}\sin 2\varphi} d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^8}{8}\right]_{r=0}^{r=R} \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{R^8}{8} \times \frac{1}{4} 1 \left(-\frac{1}{4}\right)(-1-1) = \underline{\frac{R^8}{64}}$$