数学Ｉ中間試験（平成３１年６月２５日）

20

問１ 次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ の４つの１階の偏導関数 f_x, f_y, g_x, g_y を求めなさい。

5 5 5 5

$$f(x,y) = y^x (= e^{x\log y}), \qquad g(x,y) = \mathrm{Arcsin}(x/y).$$

30

問２ 次の関数 $f(x,y)$ の６つの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,y}, f_{x,x,y}$ を求めなさい。ただし、a, b は定数とする。

5 5 5 5 5 5

$$f(x,y) = e^{ax^2+by^2}.$$

15

問３ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に変数変換した合成関数 $z(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の３つの偏導関数 z_r, z_θ, $z_{r,\theta}$ を f_x, f_y, $f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表しなさい。

5 5 5

問４ 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

20

$$f(x,y) = e^{-x^2+y^2-2y}.$$

（１）$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を全て求めなさい。 10

（２）（１）で求めた点 (a,b) は、極大点、極小点、鞍点のいずれであるか調べなさい。 10

15

問５ 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ について以下の問いに答えなさい。

（１）$f(x,y)$ は原点で連続であるか調べなさい。 5

（２）$f(x,y)$ の原点における偏導関数を求めなさい。

fx fy 5

問1、 $f(x,y)=y^x=e^{x\log y}$

$f_x=e^{x\log y}(x\log y)_x=\underline{\log y\cdot y^x}$

$f_y=e^{x\log y}(x\log y)_y=\frac{x}{y}y^x=\underline{xy^{x-1}}$

$g(x,y)=\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{y}\right)$

$g_x=\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)_x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$

$g_y=\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)_y}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\quad-\dfrac{\frac{x}{y}}{\sqrt{y^2-x^2}}$

問2.

$f_x=\underline{2ax\,e^{ax^2+by^2}}$

$f_y=\underline{2by\,e^{ax^2+by^2}}$

$f_{xx}=\underline{2a(1+2ax^2)e^{ax^2+by^2}}$

$f_{yy}=\underline{2b(1+2by^2)e^{ax^2+by^2}}$

$f_{xy}=\underline{4abxy\,e^{ax^2+by^2}}$

$f_{xxy}=\underline{4aby(1+2ax^2)e^{ax^2+by^2}}$

問3.

Chain-Rule により,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

問4.

(1) $f_x = (-2x)e^{-x^2+y^2-2y} = 0$

$f_y = (2y-2)e^{-x^2+y^2-2y} = 0$

を解くと、

$(a,b)=(0,1)$

(2) $f_{xx} = (-2+4x^2)e^{-x^2+y^2-2y}$

$f_{xy} = (-4)x(y-1)e^{-x^2+y^2-2y}$

$f_{yx} = f_{xy}$

$f_{yy} = (4y^2-8y+6)e^{-x^2+y^2-2y}$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{yx}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (-2)e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = (-4)e^{-2} < 0$$

よって あん点

問5

(1) 極座標に変換する。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = r\cos\theta \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= r\cos\theta \cdot \cos 2\theta$$

よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to+0} r\cos\theta\cos2\theta=0=f(0,0)$$

つまり原点で連続。

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\underline{0}$$