数学 I 中間試験（平成３１年６月２０日）

問１ 20 次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ の４つの１階の偏導関数 f_x, f_y, g_x, g_y を求めなさい。

5 5 5 5

$$f(x,y) = x^y (= e^{y \log x}), \qquad g(x,y) = \mathrm{Arctan}(x/y).$$

問２ 30 次の関数 $f(x,y)$ の６つの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,y}, f_{x,x,x}$ を求めなさい。

5 5 5 5 5 5

$$f(x,y) = xe^{x^2-y^2}.$$

15 問３ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に変数変換した合成関数 $z(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の３つの偏導関数 z_r, z_θ, $z_{r,\theta}$ を f_x, f_y, $f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表しなさい。

5 5 5

20 問４ 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y) = x^2 + xy.$$

（１）$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を全て求めなさい。 10

（２）（１）で求めた点 (a,b) は、極大点、極小点、鞍点のいずれであるか調べなさい。 10

15 問５ 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ について以下の問いに答えなさい。

（１）$f(x,y)$ は原点で連続であるか調べなさい。 5

（２）$f(x,y)$ の原点における偏導関数を求めなさい。

f_x 5 f_y 5

問1.

$$f(x,y) = x^y = e^{y\log x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y\log x}\frac{\partial}{\partial x}(y\log x) = \frac{y}{x}x^y = \underline{y x^{y-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y\log x}\frac{\partial}{\partial y}(y\log x) = \underline{\log x \cdot x^y}$$

$$g(x,y) = \mathrm{Arctan}(x/y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \underline{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \underline{-\frac{x}{x^2+y^2}}$$

問2.

$$f_x = e^{x^2-y^2} + x \times 2x e^{x^2-y^2}$$
$$= \underline{(1+2x^2)e^{x^2-y^2}}$$

$$f_y = x(-2y)e^{x^2-y^2} = \underline{-2xy\,e^{x^2-y^2}}$$

$$f_{xx} = 4x e^{x^2-y^2} + (1+2x^2) \times 2x e^{x^2-y^2}$$
$$= \underline{(6x+4x^3)e^{x^2-y^2}}$$

$$f_{xy} = \underline{(1+2x^2)(-2y)e^{x^2-y^2}}$$

$$f_{yy} = (-2x)e^{x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{x^2-y^2}$$
$$= \underline{(-2x)(1-2y^2)e^{x^2-y^2}}$$

$$f_{xxx} = (6+12x^2)e^{x^2-y^2} + (6x+4x^3)(2x)e^{x^2-y^2}$$

$$= (6+12x^2+12x^2+8x^4)e^{x^2-y^2}$$

$$= (6+24x^2+8x^4)e^{x^2-y^2}$$

問3.

Chain-Rule により,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$
$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$
$$+ \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

問4、

(1) $f_x = 2x + y = 0$
$f_y = x \quad = 0$ の解は、

$(x, y) = (0, 0)$

(2)

$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1$
$f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 0$

$(x, y) = (0, 0)$において、

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

よって、あん点.

問5、 (1) 極座標に変換する.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3}{r^2}(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) \longrightarrow 0 \quad (r \to +0)$$

つまり

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to +0} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 0 = f(0,0).$$

つまり 原点で連続

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = \underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = \underline{-1}$$