数学Ｃ・中間試験問題（平成３０年１２月１９日午後クラス、５８名）

15

問１．（１） 複素数 $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ を極形式で表せ。 10

（２） 複素数 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^9$ をもとめよ。 5

問２ 次の連立１次方程式系を解け。

30

$$(1)\ \left(\begin{array}{c} 2x-4y-z=3 \\ x-2y-z=2 \\ 3x-6y-2z=5 \end{array}\right.,\quad (2)\ \left(\begin{array}{c} x+2y-z+w=0 \\ x+y-2z-3w=0 \\ x+2y-3z-w=-4 \\ 2x-3y+z+w=3 \end{array}\right..$$

15 15

問３． 次の行列のランクを求めよ。

20

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

10 10

問４． 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ とする。次を求めなさい。

（１） $A-2B$

（２） AC

（３） CB

問５． 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 P^{-1} は、$PP^{-1}=P^{-1}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす２次正方行列とする。

（１） 行列 P^{-1} を求めなさい。

（２） $P^{-1}AP$ を計算しなさい。

（３） $(P^{-1}AP)^n$ を計算しなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。

（４） A^n を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。

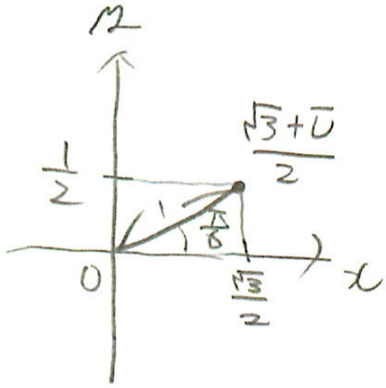
解答入れなおし

（ミスプリ訂正）

数C 2018 中間テスト解答例

問1.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^9$

$= \cos\left(\dfrac{9}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{9}{6}\pi\right) = -i$

問2、

(1) 拡大係数行列を基本変形する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-2② \\ ③-3②}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②+① \\ ③-①}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

つまり $z = -1$

$x - 2y = 1$

$y = t$ とおくと、

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$ （t は任意）

(2)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②-①\\③-①\\④-2①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+2②\\④-7②}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 27 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②\times(-1)\\③\times\left(-\frac{1}{2}\right)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 27 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+3③\\②-③\\④-10③}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[④\frac{1}{17}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+4④ \\ ②-3④ \\ ③-④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \\ w = -1 \end{cases}$

問3.

(1) 基本変形する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+2③ \\ ②-3③}]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+2①]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

主成分は3つ

よって $\operatorname{rank} A = 3$

④

(2)

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xmapsto[\substack{①-2② \\ ④-②}]{} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{①-4③ \\ ④-③}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{②+2\times③ \\ ④-2\times①}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主因子は3つ．よって $\underline{\mathrm{rank}(B)=3}$

問4

(1) $A-2B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 12 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

(2)

$$AC=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2-1+4 & -2-14 \\ -1+3-2 & 6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

(3)

$$CB=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2+2 & -5+4 \\ 2 & 4-7 & -10-14 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -24 \end{pmatrix}$$

問5

(1) Pの逆行列P^{-1}は、

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

(2)

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&0\\0&-4\end{pmatrix}$$

(3) $$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}6^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix}$$

(4) $$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{E}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{E}A\underbrace{P}_{E}\cdot\cdots\underbrace{P^{-1}}_{E}AP$$

$$=P^{-1}A^nP$$

A^n

$$=P(P^{-1}A^nP)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6^n+(-4)^n&6^n-(-4)^n\\6^n-(-4)^n&6^n+(-4)^n\end{pmatrix}$$