数学C・中間試験問題（平成３０年１２月１９日午前クラス、７７名）

15

問１．（１） 複素数 $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ を極形式で表せ。 10

（２） 複素数 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$ をもとめよ。

5

30

問２ 次の連立１次方程式系を解け。

$$(1)\quad \begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+y+3z=3 \\ x-y+3z=0 \end{cases},\qquad (2)\quad \begin{cases} x+2y+3z+2w=6 \\ x+3y+4z+3w=5 \\ x+y+3z=12 \\ 2x+3y+6z+5w=6 \end{cases}.$$

15 15

20

問３．次の行列のランクを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10 10

15

問４． 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ とする。次を求めなさい。

（１）$A-2B$ 5

（２）AC 5

（３）CB 5

20

問５． 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 P^{-1} は、$PP^{-1}=P^{-1}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす２次正方行列とする。

（１）行列 P^{-1} を求めなさい。 5

（２）$P^{-1}AP$ を計算しなさい。 5

（３）$(P^{-1}AP)^n$ を計算しなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。 5

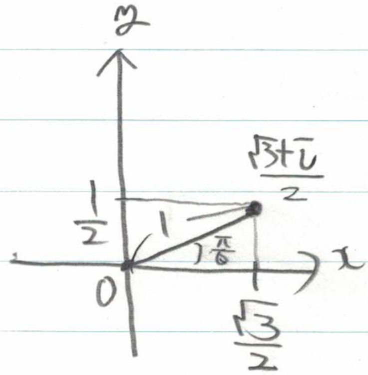
（４）A^n を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。

5

数学C　2018　解答例

問1.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \underline{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$



(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

$= \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^6$

$= \cos(\pi)+i\sin(\pi) = \underline{-1}$

問2.

(1) 拡大係数行列に行の基本変形をほどこす。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③-①]{②-2①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③+②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

つまり、

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

$z = t$ とおけば、

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$$ ただし t は任意.

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-① \\ ④-2①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-2② \\ ③+② \\ ④+②}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②-③ \\ ④-③}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-④ \\ ②-2④ \\ ③+④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

つまり
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ w = -4 \end{cases}$$

問3.

(1) 基本変形する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②-3① \\ ③-2①}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-5②]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

主成分は2つ. よって、$\underline{\mathrm{rank}(A) = 2}$

(2)

$$B=\begin{pmatrix}3&1&1&5\\0&1&0&1\\1&-1&1&3\\2&0&1&2\end{pmatrix}\xmapsto[\text{④}-2\text{③}]{\text{①}-3\text{③}}\begin{pmatrix}0&4&-2&-4\\0&1&0&1\\1&-1&1&3\\0&2&-1&-4\end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{\text{①}-4\text{②}\\ \text{③}+\text{②}\\ \text{④}-2\text{②}}]{}\begin{pmatrix}0&0&-2&-8\\0&1&0&1\\1&0&1&4\\0&0&-1&-6\end{pmatrix}\xmapsto[\substack{\text{①}-2\text{④}\\ \text{③}+\text{④}}]{}\begin{pmatrix}0&0&0&4\\0&1&0&1\\1&0&0&-2\\0&0&-1&-6\end{pmatrix}$$

$$\longmapsto\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

主成分は4つ。よって $\underline{\mathrm{rank}(B)=4}$

問4.

(1) $A-2B=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&10\\0&2&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&-4&-8\\1&1&-4\end{pmatrix}$

(2) $AC=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\2&7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+4&14\\1+3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&14\\4&6\end{pmatrix}$

(3) $CB=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&2+2&5+4\\2&4+7&10+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&4&9\\2&11&24\end{pmatrix}$

問5.

(1) Pの逆行列P^{-1}は、

$$P^{-1} = \frac{1}{1+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(2)

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(3)

$$(P^{-1}AP)^n = \underline{\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}}$$

(4)

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{=E}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{=E}A\underbrace{P}_{E}\cdots\underbrace{P^{-1}}_{E}AP$$

$$= P^{-1}A^nP = \underline{\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}}$$

よって

$$A^n = P\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n+(-2)^n & 4^n-(-2)^n \\ 4^n-(-2)^n & 4^n+(-2)^n \end{pmatrix}}$$