数学II・２０１８・期末試験問題（７月２０日、学科混合７４名）

20

問１．多項式のなすベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ のベクトル $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を以下の式で定める．

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 3, \quad f_2(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

（１）$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は一次独立か調べなさい． 10

（２）$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ で生成される部分ベクトル空間を W とする．このとき $\dim W$ を求めなさい． 10

20

問２．（１）線形写像の定義を述べなさい． 10

（２）関数 $f(x) = x$, $g(x) = x + a$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への線型写像であるか、理由も付して Yes か No か答えなさい．ただし、定数 $a \neq 0$ とする． 10=5+5

25

問３．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）A の固有多項式 $g_A(t) = |tE_2 - A|$． 5

（２）A の全ての固有値 λ． 5

（３）各固有値 λ に対する A の固有空間 $W(\lambda; A) = \{x \in \mathbf{R}^2 | Ax = \lambda x\}$． 10

（４）A^n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$． 5

25

問４．行列 $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）B の固有多項式 $g_B(t) = |tE_3 - B|$． 5

（２）B の全ての固有値 λ． 5

（３）各固有値 λ に対する B の固有空間 $W(\lambda; B) = \{x \in \mathbf{R}^3 | Bx = \lambda x\}$． 10

（４）B に対し変換行列 P を求め、B を対角化しなさい． 5

10

問５．２次以下の多項式のなすベクトル空間を $\mathbf{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$ とする．$\mathbf{R}_2[x]$ から $\mathbf{R}_2[x]$ への線型写像 $T_b : f(x) \to f(x+b)$ $\quad (f(x) \in \mathbf{R}_2[x])$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列を求めなさい．

問1.

(1) $f_1(x)+f_2(x)$

$= 4(x^2+x+1) = 4f_3(x)$

1次独立ではない.

(2) $f_3(x) = \frac{1}{4}(f_1(x)+f_2(x))$ であるから、

W は $f_1(x), f_2(x)$ で生成されるベクトル空間である.

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(c_1+3c_2)x^2+(2c_1+2c_2)x+(3c_1+c_2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

よって $f_1(x), f_2(x)$ は1次独立.

よって $\dim W = 2$

問2.

(1) U, V ：ベクトル空間

写像 $T: U \to V$ が線型写像

$\Longleftrightarrow$

① すべての $u_1, u_2 \in U$ に対し、
$T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$.

② すべての $c \in \mathbb{R}$, $u \in U$ に対し、
$T(cu) = cT(u)$

(2) $f(x)$: Yes

① $f(x_1+x_2) = x_1+x_2$
$f(x_1)+f(x_2) = x_1+x_2$

② $f(cx) = cx$
$cf(x) = cx$

$g(x)$: No

① $g(x_1+x_2) = x_1+x_2+a$
$\neq$
$g(x_1)+g(x_2) = x_1+a+x_2+a$

② $g(cx) = cx+a$
$\neq$
$cg(x) = c(x+a)$

問3.

(1) $g_A(t) = |tE_2 - A|$

$$= \begin{vmatrix} t-3 & 6 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-3)(t+2) - 6$$

$$= \underline{t^2 - t - 12}$$

(2) $g_A(t) = (t+3)(t-4) = 0$ を解いて、

$\underline{\lambda = -3, 4}$ が固有値

(3) 固有ベクトルは、

$(\lambda E_2 - A)x = 0$ より、

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x_1 + 6x_2 = 0 \\ x_1 + (\lambda + 2)x_2 = 0 \end{cases}$$ を解くと、

$\lambda = -3$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4$ で $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる.

よって

$$\underline{W(-3; A) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}}$$

$$\underline{W(4; A) = \left\{ c\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}}$$

(4) 変換行列 $P=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ に対し、

$$P^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$$
$$=P^{-1}A^nP.$$

よって

$$A^n=P\cdot(P^{-1}AP)^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -6\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}(-3)^n+6\cdot 4^n & 6(-3)^n-6\cdot 4^n\\ (-3)^n-4^n & 6(-3)^n+4^n\end{pmatrix}$$

問4.

(1) $g_B(t) = |tE_3 - B|$

$$= \begin{vmatrix} t-6 & -4 & -5 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 2 & 2 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t-6 & -t+2 & -5 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 2 & 0 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} 2 \begin{vmatrix} -t+2 & -5 \\ t-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3}(t+1) \begin{vmatrix} t-6 & -t+2 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(t-2) \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (t+1)(t-2) \begin{vmatrix} t-6 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(t-2)(-1+5) + (t+1)(t-2)(t-6+1)$$

$$= (t-2)(8 + t^2 - 4t - 5)$$

$$= (t-2)(t^2 - 4t + 3)$$

$$= \underline{(t-1)(t-2)(t-3)}$$

(2) $g_B(t) = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$ を解いて

<u>固有値 $\lambda = 1, 2, 3$</u>

(3) $(\lambda E_3 - A)x = 0$ より、

$$\begin{cases} (\lambda-6)x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (\lambda+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

を解くと、

$\lambda=1$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\lambda=2$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=3$ で $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$W(1;B) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(2;B) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(3;B) = \left\{ c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

(4) $\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ とおく.

$$\underline{P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}}$$

問5、

$$T_b(1) = 1$$
$$T_b(x) = x + b$$
$$T_b(x^2) = (x+b)^2 = x^2 + 2b \cdot x + b^2$$

$$\left(T_b(1)\ T_b(x)\ T_b(x^2) \right)$$
$$= (1\ x\ x^2) \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (☆)$$

$$\begin{cases} Y = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 \\ Z = T_b(Y) = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 \end{cases}$$ とする.

$$\left(T_b(1)\ T_B(x)\ T_B(x^2) \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= T_b(Y) = Z = (1\ x\ x^2) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

(☆) に右から $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\mathrm{LHS} = \left(T_b(1)\ T_b(x)\ T_b(x^2) \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1\ x\ x^2) \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{RHS} = (1\ x\ x^2) \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{表現行列}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$