数学II・２０１８・中間試験（６月１５日）

問１． 次の連立１次方程式を解きなさい。 10

$$
\begin{aligned}
x + 2z &= 1 \\
2x + y + z &= 0 \\
x - y + 2z &= 0.
\end{aligned}
$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問２． 次の行列式を計算しなさい。 20

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 2 & t-1 & 1 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix}.
$$

10　10

-3

$(t-1)(t^2-t+1)$
$= t^3-2t^2+2t-1$

問３． 次の行列 A の逆行列を求めなさい。 20

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10

問４． ２次行列全体のなすベクトル空間 $V = \mathrm{Mat}(2, \mathbf{R})$ の次の部分集合 T, D は部分ベクトル空間であるか調べなさい。

$$
T = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \,\middle|\, \mathrm{Tr}(A) = 0 \right\}, \quad
D = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \,\middle|\, |A| = 0 \right\}.
$$

5　5

ただし、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ に対して、$\mathrm{Tr}(A) = a + d$, $|A| = ad - bc$.

10 **問５．** $V = \mathbf{R}[x]$ を多項式全体のなすベクトル空間とする。多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ を以下で定める。

$$
f_1(x) = 1 - x, \quad f_2(x) = x - x^2, \quad f_3(x) = x^2 - x^3, \quad f_4(x) = x^3 - 1.
$$

（１）多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ の組は一次独立か調べなさい。 5

（２）多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ で生成される V の部分ベクトル空間 W の次元 $\dim W$ を求めなさい。 5

裏に問６があります。

30

問6． ベクトル空間 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元 $\underbrace{\dim W_1}_{10}, \underbrace{\dim W_2}_{10}, \underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{10}$ を求めなさい。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

問1、拡大係数行列

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{②-2① \\ ③-①}]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)
\xrightarrow[②+③]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{②\times(-\frac{1}{3}) \\ ③\times(-1)}]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[①-2②]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

問2、

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (2+1) + 2(-2-1)
$$

$$
= 3 - 6 = \underline{-3}
$$

$$\begin{vmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 2 & t-1 & 1 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)\left((t+1)(t-2)+3\right)$$

$$= (t-1)(t^2-t+1)$$

$(=t^3-2t^2+2t-1)$

問3.

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③-2\times①}]{②-①}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-③}]{①-③}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①-②}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問4. ・ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in T$

つまり　$a+d=0,\ e+h=0$　ならば、

$$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right)$$

$$=(a+e)+(d+h)=(a+d)+(e+h)=0$$

つまり、　$\underline{A+B \in T}$.

また、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T$ つまり $a+d=0$

ならば、　$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\mathrm{Tr}(\alpha A)=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}=\alpha(a+d)=0$$

つまり　$\underline{\alpha A \in T}$.

よって　<u>Tは部分ベクトル空間である.</u>

・ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$|A|=0,\ |B|=0$　である. つまり $A, B \in D$.

しかしながら、

$$|A+B|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4 \neq 0$$

つまり $A+B \notin D$. つまり <u>Dは部分ベクトル空間ではない.</u>

問5.

(1) $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$

であるから1次独立ではない。

(2) $f_4(x)=-(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x))$

であるから、Wは $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ で生成される。さて、

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$$

ならば、

$$c_1(1-x)+c_2(x-x^2)+c_3(x^2-x^3)$$

$$=c_1+(-c_1+c_2)x+(-c_2+c_3)x^2-c_3x^3=0$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{② + ① \\ ③ + ④}]{}$$

⑤

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

つまり、$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は1次独立,

よって $\dim W = 3$

問6

W_1 : 拡大係数行列を変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}-\frac{1}{3}\text{②},\ \frac{1}{3}\text{②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t - 11s \\ x_2 = -t + 2s \end{cases} \qquad x_3 = t,\ x_4 = 3s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_1 = 2}$$

W_2 : 拡大係数行列を変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}-\text{①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}-2\times\text{②}]{}$$

(7)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t - 2s \\ x_2 = -t \end{cases} \qquad x_3 = t,\ x_4 = s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_2 = 2}$$

$W_1 \cap W_2$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2 - 3 \cdot 3 \\ 4 - 2 \times 3}]{1 - 3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{1 - 4 \, 2 \\ 3 + 2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_1 \cap W_2 = 1}$$