# 数学Ｉ・２０１８・期末試験（７月２０日、学科混合、１０９名）

**問１** 次の累次積分の積分順序を交換しなさい。ただし、$f(x, y)$ は連続関数とする。

20

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{x} f(x, y)dy \right) dx, \quad \int_1^e \left( \int_0^{\log x} f(x, y)dy \right) dx.$$

10　　10

**問２** 次の積分を計算しなさい。

20

$$\int\int_D e^{y/x} dxdy.$$

ただし、$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \right\}$.

20

**問３**（１）極座標変換 $(x, y) = (r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta)$ のヤコビアン $J(r, \theta)$ を求めなさい。 5

（２）次の積分を計算しなさい。

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

ただし、$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 100,\ x, y \geq 0 \}$. 15

**問４** 次の積分を計算しなさい。

20

$$\int\int\int_D (2x + 3y + 4z)dxdydz.$$

ただし、$D = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + z \leq 1,\ x, y, z \geq 0 \}$. 20

20

**問５**（１）極座標変換 $(x, y, z) = (r\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ r\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ r\ \cos\theta)$ のヤコビアン $J(r, \theta, \varphi)$ を求めなさい。 5

（２）次の積分を計算しなさい。

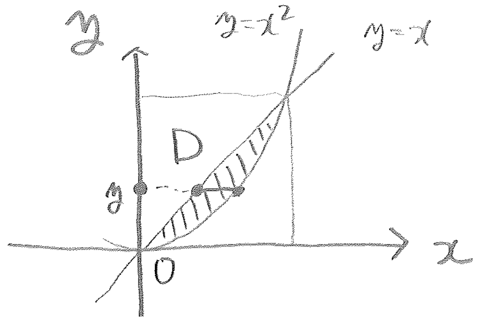
$$\int\int\int_D z(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$$

ただし、$D = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y \in \mathbf{R},\ z \geq 0 \}$. 15

問1.

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

積分領域を図示すると、



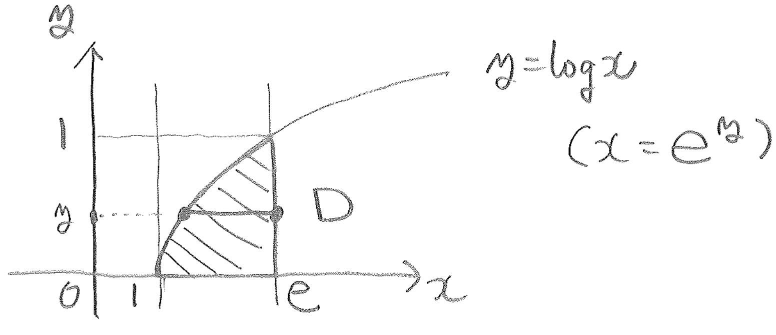

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$$
$$= \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq y^{\frac{1}{2}}\}$$

よって

$$\int_0^1 \left( \int_{y}^{y^{\frac{1}{2}}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\int_1^e \left( \int_0^{\log x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

積分領域を図示すると、




$$D = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \log x\}$$
$$= \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ e^y \leq x \leq e\}$$

よって

$$\int_0^1 \left( \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dy \right) dx$$

問2.

$$\iint_D e^{y/x}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^x e^{y/x}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[ x e^{y/x} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 ( xe - x )\,dx$$

$$= (e-1) \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(e-1)}$$

問3

(1)

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{r}$$

(2) 積分変数変換公式により

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{r} r\,dr\,d\theta$$

ただし、

$$\tilde{D}=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq 10,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$$

よって

$$I=\int_0^{10}1\,dr\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta$$

$$=10\times\frac{\pi}{2}=\underline{5\pi}$$

問4.

$$D=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leq 1,\ x,y,z\geq 0\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq 1-x-y\}$$

よって

$$I=\iiint_D(2x+3y+4z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(2x+3y+4z)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[2z^2+(2x+3y)z\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(-y^2-(x+1)y+2(1-x^2))\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}(x+1)+2(1-x^2)y\right]_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}(x-1)^3+(x-1)^2\right\}dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{24}(x-1)^4 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= +\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$$

問5.

(1)

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\cos\theta\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi+r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$+r\sin\theta\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi+r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta$$

$$=r^2\sin\theta$$

(2)

積分変数変換公式により、

$$I=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)z\,dxdydz$$

$$=\iiint_{D'} r^2\times r\cos\theta\; r^2\sin\theta\; drd\theta d\varphi$$

$$= \iiint_{\tilde{D}} r^5 \frac{1}{2} \sin 2\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

ただし、

$$\tilde{D} = \{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

$$I = \int_0^1 r^5 \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \times \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi$$

$$= \left[ \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} \times \left[ -\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[ \varphi \right]_{\varphi=0}^{(\varphi=2\pi)}$$

$$= \frac{1}{6} \times \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \times 2\pi = \underline{\frac{\pi}{6}}$$