数学 I 中間試験（平成３０年６月２１日）

18

問１　次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ の１階の偏導関数を全て求めなさい。

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2},\quad g(x,y)=x^y(=e^{y\log x})\quad h(x,y)=\mathrm{Arcsin}(xy).$$

6　6　6

24

問２　次の関数 $f(x,y)$ の２階までの全ての偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を求めなさい。ただし、$a,b\in\mathbf{R}$ は定数。

4 4 4 4 4 4

$$f(x,y)=e^{ax^2+by^2}.$$

13

問３　関数 $f(x,y,z)$ は C^1 級とする。合成関数 $g(r,\theta,\varphi)$ の１階偏導関数 $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ を用いて表しなさい。ただし、

5+4+4

$$g(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

20

問４　次の関数 $z=f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y)=e^{-x^2+y^2-2y}.$$

（１）臨界点 $f_x=f_y=0$ を求めなさい。　10

（２）（１）で求めた臨界点は、極大点、極小点、鞍点のいずれであるか調べなさい。　10

25

問５　関数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ について以下の問いに答えなさい。

（１）$f(x,y)$ は原点で連続であるか調べなさい。　10

（２）$f(x,y)$ の原点における偏導関数を求めなさい。　10

（３）$f(x,y)$ は原点で全微分可能であるか調べなさい。　5

問1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{x}e^{y\log x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \log x\, e^{y\log x} = \log x \cdot x^{y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$

問2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax\, e^{ax^2+by^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2by\, e^{ax^2+by^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a\, e^{ax^2+by^2} + (2ax)^2 e^{ax^2+by^2}$$
$$= 2a(1+2ax^2)\, e^{ax^2+by^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b(1+2by^2)\, e^{ax^2+by^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4abxy\, e^{ax^2+by^2}$$

問3.

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta\sin\varphi$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(-r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\sin\theta\cos\varphi$$

問4.

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-2x)\, e^{-x^2+y^2-2y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y-2)\, e^{-x^2+y^2-2y} = 0$$

$(x, y) = (0, 1)$ が臨界点

③

$$f_{xx} = -2e^{-x^2+y^2-2y} + 4x^2 e^{-x^2+y^2-2y}$$

$$f_{yy} = 2e^{-x^2+y^2-2y} + (2y-2)^2 e^{-x^2+y^2-2y}$$

$$= (4y^2-4y+6)e^{-x^2+y^2-2y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = (-2x)(2y-2)e^{-x^2+y^2-2y}$$

$$f_{xx}(0,1) = -2e^{-1}$$

$$f_{yy}(0,1) = 6e^{-1}$$

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{yx}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

よって、あん点

問5

(1) $\displaystyle\lim_{x,y\to 0} f(x,y)$

$\displaystyle = \lim_{r\to +0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\displaystyle = \lim_{r\to +0} r\cos\theta\sin\theta = 0 = f(0,0)$

よって 連続

(2) $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$

$\displaystyle = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0$

$\displaystyle \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$

$\displaystyle = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y} = 0.$

(3) 全微分可能である必要十分条件は、

$f(\Delta x,\Delta y) = f(0,0) + f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y$

$+ o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ となること。

$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ であるから、

$f(\Delta x,\Delta y) = o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ となるか

調べたらよい。

$$\frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \cos\theta\sin\theta$$

$\Delta x = r\cos\theta,\ \Delta y = r\sin\theta$ とした.

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \to 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \cos\theta\sin\theta.$$

極限値は角度θに依存しており、一般に0ではない. よって、$f(\Delta x, \Delta y)$はLandauの記号では表せない.

$$f(\Delta x, \Delta y) \neq o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

よって全微分可能ではない.