数学 I 中間試験（平成３０年６月１９日）

18

問１　次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ の１階の偏導関数を全て求めなさい。

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2},\quad g(x,y)=x^y(=e^{y\log x})\quad h(x,y)=\mathrm{Arctan}(xy).$$

6　6　6

24

問２　次の関数 $f(x,y)$ の２階までの全ての偏導関数 f_x, f_y, $f_{x,x}$, $f_{x,y}$, $f_{y,x}$, $f_{y,y}$ を求めなさい。

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

4 4 4 4 4 4

13

問３　関数 $f(x,y,z)$ は C^1 級とする。合成関数 $g(r,\theta,\varphi)$ の１階偏導関数 $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ を用いて表しなさい。ただし、

$$g(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta).$$

20

問４　次の関数 $z=f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y)=3xy-x^3-2y^2+3.$$

（１）臨界点 $f_x=f_y=0$ を求めなさい。　10

（２）（１）で求めた臨界点は、極大点、極小点、鞍点のいずれであるか調べなさい。　10

25

問５　関数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ について以下の問いに答えなさい。

（１）$f(x,y)$ は原点で連続であるか調べなさい。　10

（２）$f(x,y)$ の原点における偏導関数を求めなさい。　10

（３）$f(x,y)$ は原点で全微分可能であるか調べなさい。　15

問1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \dfrac{1}{2} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{(x^2+y^2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2+y^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{y}{x} e^{y \log x} = y x^{y-1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \log x \, e^{y \log x} = \log x \cdot x^{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{y}{1+(xy)^2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{x}{1+(xy)^2} \end{cases}$$

問2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{+\ (x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

問3、

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}(-r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\sin\theta\cos\varphi$$

問4

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 0$ …①

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 4y = 0$ …②

②の $y = \frac{3}{4}x$ を①に代入．

$3 \cdot \frac{3}{4}x - 3x^2 = 0$

$= \frac{3}{4}(3x - 4x^2) = \frac{3}{4}x(3 - 4x)$

$x = 0, \frac{3}{4}$

よって
臨界点は、 $(x, y) = (0, 0), (\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$

(2) $f_{xx} = -6x$

$f_{xy} = f_{yx} = 3$

$f_{yy} = -4$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 24x - 9$$

点 $(0,0)$ において、$f_{xx} = 0$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f \end{vmatrix}_{(0,0)} = -9 < 0$$

よって あん点

点 $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$ において、$f_{xx} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} < 0$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)} = 18 - 9 = 9 > 0$$

よって、極大

問5、

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおく.

$$\lim_{r\to+0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to+0} \cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta$$

極限値は角度 θ に依存する.
よって <u>連続ではない.</u>

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

(3) 全微分可能ならば連続である.
しかし、(1)で不連続であるから、
<u>全微分可能ではない.</u>