数学Ⅱ 2019 (8回目)

問. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化する.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{(1)} & & O \\ & \boxed{(1)} & \\ O & & \boxed{(2)} \end{pmatrix}.$$

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ であるから,

$$A^n = P\,(P^{-1}AP)^n\,P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{(3)} & 2^{n+1}-2 & 2^n-1 \\ -2^n+1 & 3\cdot 2^{n+1}-2 & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-2 & -2^{n+2}+\boxed{(4)} & -2^n+2 \end{pmatrix}$$

2

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 1$

$\boxed{(3)} = 1$

$\boxed{(4)} = 4$

（略解）

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$A^n=P\cdot(P^{-1}AP)^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2^{n+1}-2 & 2^n-1\\ -2^n+1 & 3\cdot 2^n-2 & 2^n-1\\ 2^{n+1}-2 & -2^{n+2}+4 & -2^n+2\end{pmatrix}$$