数学III 2019　7回目レポート

問

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

$$g_A(t)=|tE_3-A|$$
$$=t(t-1)(t-\boxed{(1)})$$

固有値 0 に対する固有ベクトル P_1

$$P_1=\begin{pmatrix}2\\ \boxed{(2)}\\ 3\end{pmatrix}$$

固有値 1 に対する固有ベクトル P_2

$$P_2=\begin{pmatrix}3\\ \boxed{(3)}\\ 4\end{pmatrix}$$

固有値 $\boxed{(1)}$ に対する固有ベクトル P_3

$$P_3=\begin{pmatrix}1\\ \boxed{(4)}\\ 2\end{pmatrix}$$

$P=(P_1P_2P_3)$ とおくと、

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & O\\ & 1 & \\ O & & \boxed{(1)}\end{pmatrix}.$$

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = -1$

$\boxed{(3)} = -2$

$\boxed{(4)} = -1$

$$g_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} t+1 & 5 & 1 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 4 & 8 & t \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} 1 \times \begin{vmatrix} -2 & t-4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} t \times \begin{vmatrix} t+1 & 5 \\ -2 & t-4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 - 4(t-4)$$
$$+ t\left((t+1)(t-4) + 10 \right)$$

$$= -16 - 4t + 16$$
$$+ t\{ t^2 - 3t - 4 + 10 \}$$

$$= t^3 - 3t^2 + 6t - 4t$$
$$= t(t^2 - 3t + 2)$$
$$= t(t-1)(t-2).$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解いて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$