数学II 2019 レポート (6回目)

問、 $M(2,\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間

$V=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ から、Vへの

線型写像 T_B を次の式で定める。

$$\begin{tikzcd} T_B : V \arrow[r] & V \\ X \arrow[r, mapsto] & BXB^{-1} \end{tikzcd}$$

$$T_B:\ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ X & \longmapsto & BXB^{-1} \end{array}$$

ただし、$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

基底 $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

に関する T_B の表現行列 A をもとめなさい。

$$(T(e_1),T(e_2),T(e_3))=(e_1,e_2,e_3)A.$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boxed{(1)} & 2 & 1 \\ \boxed{(2)} & \boxed{(3)} & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{(4)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{(1)} = -1$

$\boxed{(2)} = 1$

$\boxed{(3)} = 0$

$\boxed{(4)} = -1$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

BXB^{-1}

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+z & y-x \\ x-z & y+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y+z & 2x-y+z \\ 2x+y-z & -(y+z) \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)e_1 + e_2 + e_3$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + 2e_3$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 - e_3$$

$$(T(e_1), T(e_2), T(e_3)) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3