数学II 2019 レポート5回目

問1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&8&10\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}\,A=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid Ax=0\}$ をしらべる。

$$\mathrm{Ker}\,A=\left\{\begin{pmatrix}1\\ \boxed{(1)}\\ \boxed{(2)}\end{pmatrix}t \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$$

問2. $B=\begin{pmatrix}1&4&5&-2\\-1&-1&-2&-1\end{pmatrix}$

$$\dim \mathrm{Ker}\,B=\boxed{(3)}$$

問3. $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする。このとき、$a_1-a_2,\ a_2-a_3,\ a_3-a_1$ で生成される部分ベクトル空間を W とする.

$$\dim W=\boxed{(4)}$$

$\boxed{(1)} = -3$

$\boxed{(2)} = 2$

$\boxed{(3)} = 2$

$\boxed{(4)} = 2$

問1.

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②-4\times①]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times\frac{1}{2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①-\frac{1}{2}②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.

$x_3 = 2t$ とすると.

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\,A = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

問2.

$$\mathrm{Ker}\,B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

拡大係数行列.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②+①]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times\frac{1}{3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①-4②]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = s,\ x_4 = t$ とおくと.

$$x_1 = -2t + s$$
$$x_2 = -s + t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\underline{\dim \mathrm{Ker}\,B = 2}$$

問3、
$$\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 \\ b_2 = a_2 - a_3 \\ b_3 = a_3 - a_1 \end{cases}$$ とおく。

$b_1 + b_2 + b_3 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_1 = 0$

よって、b_1, b_2, b_3は1次従属。

$c_1 b_1 + c_2 b_2 = 0$ ならば

$c_1 b_1 + c_2 b_2 = c_1 a_1 + (-c_1 + c_2) a_2 - c_2 a_3 = 0$

であるから、a_1, a_2, a_3の1次独立性により、

$c_1 = 0$, $-c_1 + c_2 = 0$, $-c_2 = 0$

つまり $c_1 = c_2 = 0$ 。

つまり b_1, b_2は1次独立。

$b_3 = -b_1 - b_2$ より、

b_1, b_2, b_3で生成されるWは、

b_1, b_2で生成され、b_1, b_2は1次独立

なので、 $\underline{\dim W = 2}$