数学II 2019 レポート2回目

問 $V=\mathbb{R}^3$

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\in V$$

① u_1,u_2,u_3は1次独立か。

$\boxed{(1)}$に、1次独立ならば 1 を

1次従属ならば 2 を入力しなさい。

② $v=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\in V$ とする。

vを u_1,u_2,u_3 の1次結合で表しなさい。

$$v=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3$$

$$\boxed{(2)}=c_1,\ \boxed{(3)}=c_2,\ \boxed{(4)}=c_3$$

$\boxed{(1)} = 1$

$\boxed{(2)} = 6$

$\boxed{(3)} = -2$

$\boxed{(4)} = 1$

$$A=(u_1 u_2 u_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$$ とおく。

Aの逆行列は、

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[①-③]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&3&1&0&-1\\0&1&1&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[①-2\times②]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&-2&-1\\0&1&1&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②-①\\③+2\times①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&-2&-1\\0&1&0&-1&3&1\\1&0&0&2&-4&-1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&2&-4&-1\\&1&&-1&3&1\\&&1&1&2&-1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&-1\\-1&3&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

①　$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$ を c_1, c_2, c_3 について解く．

成分を書くと、

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり　1次独立．

②　$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=v$ を c_1, c_2, c_3 について解く．

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$