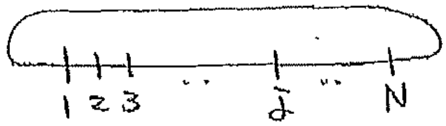
数学特論Ⅰ　レポート(1回目)

1次元Ising模型



各点 j $(1 \leq j \leq N)$ に
スピン $S_j = \pm 1$ をのせる配置 $S = (S_1, S_2, \cdots, S_N)$ の
エネルギーを $E(S) = -E \sum_{j=1}^{N} S_j S_{j+1} - H \sum_{j=1}^{N} S_j$ とする。
なお $E > 0$, $H \in \mathbb{R}$ とする。

分配関数 $Z_N = \sum_S e^{-\beta E(S)}$ と

自由エネルギー $-\beta \cdot f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_N$ をもとめよう。

なお $\beta = 1/kT$ (k:ボルツマン定数, T:温度) とする。

コメント

$H = 0$ のときは授業でやった。
1次元Ising模型は外場Hというパラメーターを簡単に入れられる。

	$H=0$	$H \neq 0$
1次元Ising	解けた	解けた
2次元Ising	解けた	未解決
N次元Ising	未解決	未解決

問1、

$$Z_N = \mathrm{Tr}(V^N) \quad , V = \begin{bmatrix} e^{\beta E+\beta H} & e^{-\beta E} \\ e^{-\beta E} & e^{\beta E-\beta H} \end{bmatrix}$$

を示せ。

問2、

$$Z_N = (\lambda_+)^N + (\lambda_-)^N$$

$$\lambda_\pm = e^{\beta E}\cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}$$

を示せ。

問3、

$$-\beta \cdot f = \log\left(e^{\beta E}\cosh(\beta H) + \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}\right)$$

を示せ。

問4、　2次元Ising模型の転送行列 V_1, V_2 は互いに可換ではないことを示せ.

$$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$$

問5、　次の行列式の式を示せ.

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \right) = \prod_{j=0}^{M} (x - M + 2j)^{{}_M C_j}$$

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) = \prod_{j=0}^{[\frac{M}{2}]} (x - M + 4j)^{2\,{}_M C_{2j}}$$

ただし $[x]$ はガウス記号とする。

問6.

$\cos x$, $\sin x$ についての n 倍角の式

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n C_{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$$

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_n C_{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x$$

に相当する $\sinh x$, $\cosh x$ の式をみちびけ.

$$\begin{cases} \cosh(nx) = \cdots ? \\ \sinh(nx) = \cdots ? \end{cases}$$

数学特論 2019　2回目レポート

問7.　$X, Y \in M(n, \mathbb{C})$ に対し、

$$e^X Y e^{-X} = e^{ad(X)}(Y)$$ を示せ。

ただし、

$$ad(X)(Y) = [X, Y] = XY - YX$$ で、

$$e^{ad(X)}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad(X)^n (Y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [X, [X, \cdots, X, [X, Y]] \cdots]]$$

である。

両辺の収束を仮定してよいとする。

問8.　K, K^* は、

$$\sinh(2K)\sinh(2K^*) = 1$$

をみたすとする。

このとき、

$$\cosh(2K^*) = \cosh(2K)\sinh(2K^*)$$

$$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$$

を示せ。

問9. 次の式を示せ.

$$x = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (x \geq 0).$$

問10. 次の式を示せ.

$$e^{2i\theta} \frac{c_1\cos\theta - i\sin\theta - s_1c_2}{c_1\cos\theta + i\sin\theta - s_1c_2}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1 e^{i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{i\theta})}{(1-\alpha_1 e^{-i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{-i\theta})}$$

ただし

$$c_1 = \cosh(2K_1)$$
$$s_1 = \sinh(2K_1)$$
$$c_2 = \cosh(2K_2)$$

$$\alpha_1 = \tanh K_1 \cdot \tanh K_2^*$$
$$\alpha_2 = \tanh K_2^* / \tanh K_1$$

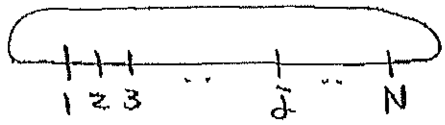
$K_i, K_i^* > 0$ は、　　　　とする.

$$\sinh(2K_i)\sinh(2K_i^*) = 1 \quad (i=1,2)$$

をみたす。

数学特論I レポート（1回目）

1次元Ising模型



各点 j $(1 \leq j \leq N)$ に
スピン $s_j = \pm 1$ をのせる配置 $S=(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ の
エネルギーを $E(S) = -E\sum_{j=1}^{N} s_j s_{j+1} - H\sum_{j=1}^{N} s_j$ とする。
なお $E>0$, $H \in \mathbb{R}$ とする。

分配関数 $Z_N = \sum_{S} e^{-\beta E(S)}$ と
自由エネルギー $-\beta \cdot f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_N$ をもとめよう。
なお $\beta = 1/kT$ （k: ボルツマン定数, T: 温度）とする。

コメント

$H=0$ のときは授業でやった。
1次元Ising模型は外場 H というパラメーターを
簡単に入れられる。

	$H=0$	$H\neq0$
1次元 Ising	解けた	解けた
2次元 Ising	解けた	未解決
N次元 Ising	未解決	未解決

問1、

$$Z_N = \mathrm{Tr}(V^N) \quad , \; V = \begin{bmatrix} e^{\beta E+\beta H} & e^{-\beta E} \\ e^{-\beta E} & e^{\beta E-\beta H} \end{bmatrix}$$

を示せ。

問2、

$$Z_N = (\lambda_+)^N + (\lambda_-)^N$$

$$\lambda_\pm = e^{\beta E}\cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}$$

を示せ。

問3、

$$-\beta \cdot f = \log\left(e^{\beta E}\cosh(\beta H) + \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}\right)$$

を示せ。

（解答）

問1、
$$Z_N = \sum_s e^{-\beta E(s)}$$
$$= \sum_s \exp\left(\beta E \sum_{j=1}^{N} s_j s_{j+1} + \beta H \sum_{j=1}^{N} s_j\right)$$
$$= \sum_s \prod_{j=1}^{N} \exp\left(\beta E s_j s_{j+1} + \frac{\beta H}{2}(s_j + s_{j+1})\right)$$

$V_{t_1,t_2} = \exp\left(\beta E t_1 t_2 + \frac{\beta H}{2}(t_1+t_2)\right)$ と略記すれば、

$$Z_N = \sum_s \prod_{j=1}^{N} V_{s_j,s_{j+1}}$$
$$= \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_N} V_{s_1 s_2} V_{s_2 s_3}\cdots V_{s_{N-1} s_N} V_{s_N s_1}$$

と書ける。

2次行列 V を

$$V = \begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ V_{-+} & V_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta E+\beta H} & e^{-\beta E} \\ e^{-\beta H} & e^{\beta E-\beta H} \end{pmatrix}$$

と定めれば上の式は、

$\underline{Z_N = \mathrm{Tr}(V^N)}$ とまとまる。

問2、行列Vの固有値を調べる.

固有方程式

$$|\lambda - V| = \begin{vmatrix} \lambda - e^{\beta E+\beta H} & -e^{-\beta E} \\ -e^{-\beta E} & \lambda - e^{\beta E-\beta H} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - e^{\beta E}(e^{\beta H} + e^{-\beta H}) + e^{2\beta E} - e^{-2\beta E} = 0$$

解の公式により、

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(e^{\beta E}(e^{\beta H}+e^{-\beta H}) \pm \sqrt{D}\right)$$

$$D = e^{2\beta E}(e^{\beta H}-e^{-\beta H})^2 + 4e^{-2\beta E} > 0$$

$D \neq 0$ なので解は2つあり、

$$\underline{\lambda_\pm = e^{\beta E}\cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}}\ .$$

2次行列が相異なる2つの固有値をもつので対角化可能、

つまりある可逆行列Pがあり、

$$P^{-1}VP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$ となる.

$$Z_N = \mathrm{Tr}(V^N)$$

$$= \mathrm{Tr}(P^{-1}V^N P)$$

$$= \mathrm{Tr}((P^{-1}VP)^N)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix}\right) = \underline{\lambda_+^N + \lambda_-^N}$$

問3、

Vの2つの固有値

$$\lambda_\pm = e^{\beta E}\cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}$$

には大小関係がある。

$$|\lambda_+| > |\lambda_-|$$

$$\frac{1}{N}\log Z_N = \frac{1}{N}\log(\lambda_+^N + \lambda_-^N)$$

$$= \log\lambda_+ + \frac{1}{N}\log\left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N\right)$$

$$\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N \to 0 \quad (N \to \infty)$$ であるから、

$$-\beta \cdot f = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_N = \log\lambda_+$$

つまり、

$$-\beta \cdot f = \log\left(e^{\beta E}\cosh(\beta H) + \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}\right)$$

問4 $V_1V_2 \neq V_2V_1$ を示せ.

$$\begin{cases} V_1 = \exp\left(K_1 \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right) \\ V_2 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \exp\left(K_2^* \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) \end{cases}$$

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \\ H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \end{cases}$$ とおく.

$\sigma^x \sigma^z = -\sigma^z \sigma^x$ であるから、

$$H_2 \cdot H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \left\{ (\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ -(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

一方、

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^x \cdot \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ +(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

よって $H_1H_2 \neq H_2H_1$

さて、

$$V_1V_2 = (1 + K_1H_1 + O(K_1^2)) \times (1 + K_2^* H_2 + O(K_2^{*2}))$$
$$\times (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}}$$
$$= (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^* H_2 + K_1K_2^* H_1H_2 + \cdots)$$

$$V_2V_1 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^* H_2 + K_1K_2^* \cdot H_2H_1 + \cdots)$$

よって $V_1V_2 \neq V_2V_1$.

問5

$$\boxed{\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{j=0}^{M}(x-M+2j)^{{}_M C_j} \quad \text{を示せ.}}$$

$$\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$u_+=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $u_-=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ とおく.

$\sigma^x u_+=u_+$, $\sigma^x u_-=-u_-$ である.

まとめて.

$\sigma^x u_\varepsilon=\varepsilon u_\varepsilon \quad (\varepsilon=\pm)$.

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ の Basis として

$\{u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M} \quad (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$

がとれる.

$$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}$$
$$=\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}.$$

よって,

$\{u_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M} \ (\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$ は

$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)$ の固有ベクトルでもある。

よって

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm}\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right).$$

さて、 $\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i$ の値は、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_M$ のうち

j $(0 \leq j \leq M)$ コが $\varepsilon_i = -$

$(M-j)$ コが $\varepsilon_i = +$ ならば、

$$\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i = -j + (M-j) = +M-2j.$$

このような えらび方は、

$${}_M C_j \text{ 通りある.}$$

よって

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) = \prod_{j=0}^{M} (x - M + 2j)$$

//

問5（続き）

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)=\prod_{j=0}^{[\frac{M}{2}]}(x-M+4j)^{2\cdot {}_M C_{2j}}$$

を示せ。

$\sigma^z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$v_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおく。

$\sigma^z v_\varepsilon = \varepsilon v_\varepsilon \quad (\varepsilon=\pm)$

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ の Basis として、

$\{v_{\varepsilon_1}\otimes v_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes v_{\varepsilon_M} \quad (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$

がとれる。

$$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)v_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes v_{\varepsilon_M}$$
$$=\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}\right)v_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes v_{\varepsilon_M}$$

よって

$\{v_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes v_{\varepsilon_M} \ (\varepsilon_1\cdots\varepsilon_M=\pm)\}$ は、

$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)$ の固有ベクトルでもある。

よって

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)=\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm}\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}\right)$$

$\sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \varepsilon_{j+1}$ の値は、組 $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ が

同符号 (i.e. $(+,+), (-,-)$) のものが L 個

異 〃 (i.e. $(+,-), (-,+)$) のものが N 個

ならば

$$\sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} = L - N$$

である.

周期性 $\varepsilon_{M+1} = \varepsilon_1$ により、

$(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ が異符号になるものは、偶数個である必要がある。

$N = 2k$ とおく. $L = M - 2k$ となり、

$$\sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} = M - 4k$$

ただし、$\left(k = 0, 1, 2, \cdots, \left[\frac{M}{2}\right]\right)$

$(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ $(1 \leq j \leq M)$ が異符号 $\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} = -$

になる j がこの $N = 2k$ 個である場合は

いくつであろうか?

$\varepsilon_1 = +$ で固定し、符号が変わる部分を、

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{2k-1} < j_{2k} = M$$

とすると、${}_M C_{2k}$ 通りあることが分かる。

$\varepsilon_1 = -$ のときも同様.

つまり、

$$2 \cdot {}_M C_{2k}$$ 通りである.

よって

$$\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm}\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}\right)$$

$$=\prod_{k=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]}\left(x-M+4k\right)^{2\cdot{}_MC_{2k}}$$

である.

まとめて、

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)=\prod_{k=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]}\left(x-M+4k\right)^{2\cdot{}_MC_{2k}}$$

問6

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ は、

全平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数である。

解析接続を考えれば、

$$\cos(inx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_nC_{2k}(-1)^k \cos^{n-2k}(ix)\sin^{2k}(ix)$$

$$\sin(inx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_nC_{2k+1}(-1)^k \cos^{n-2k-1}(ix)\sin^{2k+1}(ix)$$

が成立する。

$\cos(ix) = \cosh x$

$\sin(ix) = i\sinh x$ 　であるから、

$$\begin{cases} \cosh(nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_nC_{2k} \cosh^{n-2k}(x)\sinh^{2k}(x) \\ \sinh(nx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_nC_{2k+1} \cosh^{n-2k-1}(x)\sinh^{2k+1}(x) \end{cases}$$

が成立する。

問7 $e^{ad(Y)}(X) = e^{Y} \cdot X e^{-Y}$ を示せ。

ただし、両辺とも収束するとする。

まず、

$$ad(Y)^n(X) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k} \quad \text{——}(※)$$

を示す。nについての帰納法。

$n=1$ $\quad LHS = ad(Y)(X) = [Y, X]$

$\quad RHS = {}_1C_0(-1)XY + {}_1C_1(-1)^0 YX = [Y, X]$

となり一致。

あるnまで正しいならば、

$$\begin{aligned}
&ad^{n+1}(Y)(X) \\
&= ad(Y)\, ad^n(Y)(X) \\
&= [Y, \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^{k+1} X Y^{n-k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} (-1)^{n+1-k} Y^k X Y^{n+1-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n+1-k} Y^k X Y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k (-1)^{n+1-k} Y^k X Y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

よって (☆) は $n+1$ でも成立.

ただし、

$${}_nC_0 = 1 = {}_{n+1}C_0$$

$${}_nC_n = 1 = {}_{n+1}C_{n+1}$$

$${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k \quad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

を用いた.

(☆) を用いると、

$$e^{ad(Y)}(X)$$

$$= \sum_{=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad(Y)^n (X)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} Y^k \cdot X Y^{n-k}$$

2重和に関する式

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

に留意すれば

$$与式 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} Y^m \cdot X \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Y^n$$

$$= e^Y \cdot X \cdot e^{-Y}$$

//

問 8　$K, K^* > 0$ は、

$\sinh(2K) \cdot \sinh(2K^*) = 1$ をみたす.

このとき、

$\cosh(2K^*) = \cosh(2K)\sinh(2K^*)$

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

を示せ.

K, K^* は立場が対称なので、

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

のみ示せば十分.

$\sinh(2K) \cdot \sinh(2K^*) = 1$ を

$e^{2K^*} >$ について解く.

$$(e^{2K}-e^{-2K})(e^{2K^*})^2 - 4e^{2K^*} - (e^{2K}-e^{-2K}) = 0.$$

$$e^{2K^*} = \frac{2 \pm \sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}}, \quad D = (e^{2K}+e^{-2K})^2.$$

$e^{2K^*} >$ であるから

$$e^{2K^*} = \frac{2+\sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}} = \frac{(e^{K}+e^{-K})^2}{(e^{K}+e^{-K})(e^{K}-e^{-K})} = \frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}}$$

$$\cosh(2K^*) = \frac{1}{2}\left(e^{2K^*} + e^{-2K^*}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}} + \frac{e^{K}-e^{-K}}{e^{K}+e^{-K}}\right)$$

$$= \frac{\cosh(2K)}{\sinh(2K)}$$

//

問 9

次の式を示せ．

$$x = \int_0^{2\pi} \log\left\{2\left(\cosh x - \cos\theta\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$(x \geq 0)$$

Let us set

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (x > 0).$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi}$$

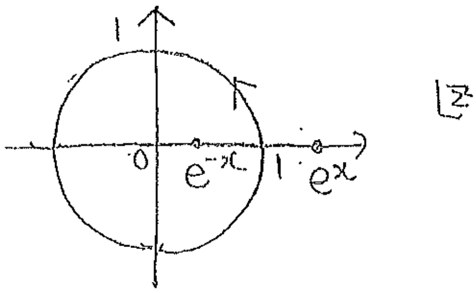
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sinh x}{\cosh x - \cos\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-x} - e^{x})}{(e^{i\theta} - e^{x})(e^{i\theta} - e^{-x})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{2\pi} d\theta .$$

$$= (e^{-x} - e^{x}) \int_C \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} \frac{dz}{2\pi i}$$

where $z = e^{i\theta}$ and

the integration contour C is given by



Because

$$\int_C \frac{dz}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = e^{-x}} \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})}$$

$$= 2\pi i / (e^{-x} - e^{x}) ,$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = 1 .$$

Hence we have

$$f(x) = x + C .$$

Below we determine the constant C.

$$f(x) = \left(\int_{\pi}^{2\pi} + \int_{0}^{\pi} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh x - \cos\theta)$$

$$+ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh x + \cos\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2^2(\cosh^2 x - \cos^2\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh 2x - \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh 2x - \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} f(2x)$$

$$\therefore \quad f(2x) = 2f(x)$$

$$f(2x) = 2x + C$$

$$2f(x) = 2x + 2C$$

$$\therefore \quad C = 0 \quad \therefore \quad \boxed{f(x) = x}$$

問10

$$\mathrm{RHS} = \frac{(1-\alpha_1 e^{i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{i\theta})}{(1-\alpha_1 e^{-i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{(1-\tanh K_1 \tanh K_2^* e^{i\theta})(1-\frac{\tanh K_1}{\tanh K_2^*} e^{i\theta})}{(1-\tanh K_1 \tanh K_2^* e^{-i\theta})(1-\frac{\tanh K_1}{\tanh K_2^*} e^{-i\theta})}$$

分母分子に $\cosh^2 K_1 \cosh^* K_2 \sinh K_2^*$ をかける.

$$\frac{(\cosh K_1 \cosh K_2^* - \sinh K_1 \sinh K_2^* e^{i\theta})(\cosh K_1 \sinh K_2^* - \sinh K_1 \cosh K_2^* e^{i\theta})}{(\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

展開する.

$$\frac{\cosh^2 K_1 \cosh K_2^* \sinh K_2^* - \cosh K_1 \sinh K_1 \cosh^2 K_2 e^{i\theta} - \sinh K_1 \cosh K_1 \sinh^2 K_2^* e^{i\theta}}{(\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

$$\frac{\cdots \quad + \sinh^2 K_1 \sinh K_2^* \cosh K_2^* e^{2i\theta}}{\cdots\cdots \quad (\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh(2x))$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1+\cosh(2x))$$

$$2\sinh x \cosh x = \sinh 2x$$ を用いると、

$$\frac{(1+c_1)s_2^* - s_1(1+c_2^*)e^{i\theta} - s_1(-1+c_2^*)e^{i\theta} + (-1+c_1)c_2^* e^{2i\theta}}{(\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

$C_2^* = C_2 S_2^*$, $C_2 = C_2^* S_2$ （レポート問8）

を用いつつ、分母分子を S_2^* で割る。

$$\frac{(1+C_1) - 2S_1C_2 e^{i\theta} + (-1+C_1)e^{2i\theta}}{(\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

$$= e^{2i\theta} \frac{(1+C_1)e^{-i\theta} - 2S_1C_2 + (-1+C_1)e^{i\theta}}{(\theta \leftrightarrow -\theta)}$$

$$= e^{2i\theta} \frac{C_1\cos\theta - i\sin\theta - S_1C_2}{C_1\cos\theta + i\sin\theta - S_1C_2}$$