数学特論 2019　2回目レポート

問7.　$X, Y \in M(n, \mathbb{C})$ に対し、

$$e^X Y e^{-X} = e^{\mathrm{ad}(X)}(Y)$$ を示せ。

ただし、

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y] = XY - YX$$ で、

$$e^{\mathrm{ad}(X)}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}(X)^n (Y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [X, [X, \cdots, X, [X, Y]] \cdots]]$$

である。

両辺の収束を仮定してよいとする。

問8.　K, K^* は、

$$\sinh(2K)\sinh(2K^*) = 1$$

をみたすとする。

このとき、

$$\cosh(2K^*) = \cosh(2K)\sinh(2K^*)$$

$$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$$

を示せ。

問9. 次の式を示せ.

$$x = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\}\frac{d\theta}{2\pi} \qquad (x \geq 0).$$

問10. 次の式を示せ.

$$e^{2i\theta}\,\frac{c_1\cos\theta - i\sin\theta - s_1 c_2}{c_1\cos\theta + i\sin\theta - s_1 c_2}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1 e^{i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{i\theta})}{(1-\alpha_1 e^{-i\theta})(1-\alpha_2^{-1}e^{-i\theta})}$$

ただし

$$C_1 = \cosh(2K_1)$$
$$S_1 = \sinh(2K_1)$$
$$C_2 = \cosh(2K_2)$$

$$\alpha_1 = \tanh K_1 \cdot \tanh K_2^*$$
$$\alpha_2 = \tanh K_2^* / \tanh K_1$$

$K_i, K_i^* > 0$ は、

$$\sinh(2K_i)\sinh(2K_i^*) = 1 \quad (i=1,2)$$

をみたす

とする.