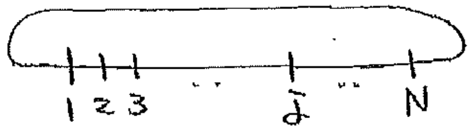
数学特論Ⅰ レポート（1回目）

1次元Ising模型



各点 j $(1 \leq j \leq N)$ に
スピン $S_j = \pm 1$ をのせる配置 $S = (S_1, S_2, \cdots, S_N)$ の
エネルギーを $E(S) = -E \sum_{j=1}^{N} S_j S_{j+1} - H \sum_{j=1}^{N} S_j$ とする。
なお $E > 0$, $H \in \mathbb{R}$ とする。

分配関数 $Z_N = \sum_{S} e^{-\beta E(S)}$ と
自由エネルギー $-\beta \cdot f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_N$ をもとめよう。
なお $\beta = 1/kT$ （k：ボルツマン定数，T：温度）とする。

コメント

$H = 0$ のときは授業でやった。
1次元Ising模型は外場 H というパラメーターを
簡単に入れられる。

	H=0	H≠0
1次元 Ising	解けた	解けた
2次元 Ising	解けた	未解決
N次元 Ising	未解決	未解決

問1、

$$Z_N = \mathrm{Tr}(V^N) \quad , V = \left[\begin{array}{c|c} e^{\beta E + \beta H} & e^{-\beta E} \\ \hline e^{-\beta E} & e^{\beta E - \beta H} \end{array}\right]$$

を示せ、

問2、

$$Z_N = (\lambda_+)^N + (\lambda_-)^N$$

$$\lambda_\pm = e^{\beta E}\cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}$$

を示せ、

問3、

$$-\beta \cdot f = \log\left(e^{\beta E}\cosh(\beta H) + \sqrt{e^{2\beta E}\sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta E}}\right)$$

を示せ.

問4、 2次元Ising模型の転送行列 V_1, V_2 は互いに可換ではないことを示せ.

$$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$$

問5、 次の行列式の式を示せ.

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \right) = \prod_{j=0}^{M} \left(x - M + 2j \right)^{{}_M C_j}$$

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) = \prod_{j=0}^{[\frac{M}{2}]} \left(x - M + 4j \right)^{2\,{}_M C_{2j}}$$

ただし $[x]$ はガウス記号とする。

問6.

$\cos x$, $\sin x$ についての n 倍角の式

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n C_{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$$

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_n C_{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x$$

に相当する $\sinh x$, $\cosh x$ の式をみちびけ.

$$\begin{cases} \cosh(nx) = \cdots ? \\ \sinh(nx) = \cdots ? \end{cases}$$