微積分解法 2019 レポート5回目

問1. $f(x) = (1-x)^{-4}$

のマクローリン展開を求めなさい。

$$f(x) = (1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{\boxed{(1)}} x^{n-1}$$

問2. $g(x) = \sqrt{\cos x}$ の

マクローリン展開を x^4 の項

までもとめよ。

$$g(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{\boxed{(2)}}x^4 + \cdots$$

No. 2

$\boxed{(1)} = 6$

$\boxed{(2)} = 96$

問1、 幾何級数のマクローリン展開

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

の両辺をxについて3回微分する。

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(3)} = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \frac{1}{3\cdot 2}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n$$

問2、
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$
$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \cdots$$
よって
$$\sqrt{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)^2 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + \cdots$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^4 + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \cdots$$