微積分解法2019 2回目レポート.

問1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は、

$s >$ $\boxed{(1)}$ のとき収束し、

$s \leq$ $\boxed{(1)}$ のとき発散する。

問2. 次の極限をもとめよ.

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{(2)}$$

微積分解法2019　2回目レポート.

問1.　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は、

$s >$ $\boxed{(1)}$ のとき収束し、

$s \leq$ $\boxed{(1)}$ のとき発散する。

問2.　次の極限をもとめよ.

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{(2)}$$

$\boxed{(1)} = 1$

$\boxed{(2)} = 0$

問2.

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$ かつ

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

よって

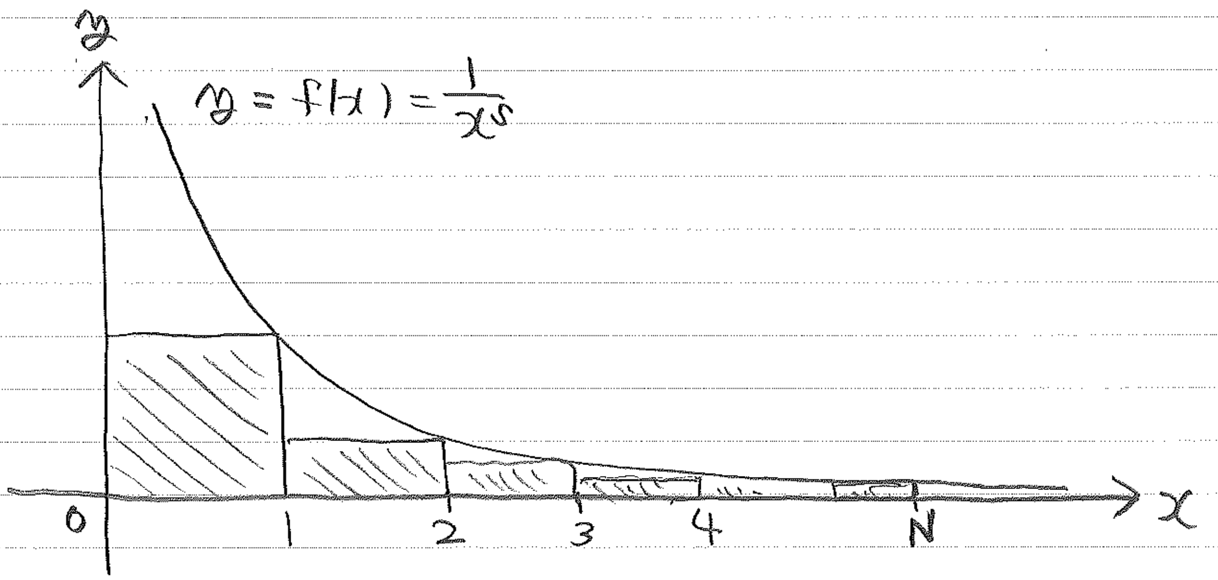
$$\lim_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

問1.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$ は単調増加。

よって、上に有界ならば、

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$ は収束する。



S_N は上図の斜線部分の面積を表す。

よって

$$S_N \leq 1 + \int_1^N f(x)\,dx = 1 + \int_1^N \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s} \right]_{x=1}^{x=N}$$

$$= 1 + \frac{1}{1-s}\left(N^{1-s} - 1\right)$$

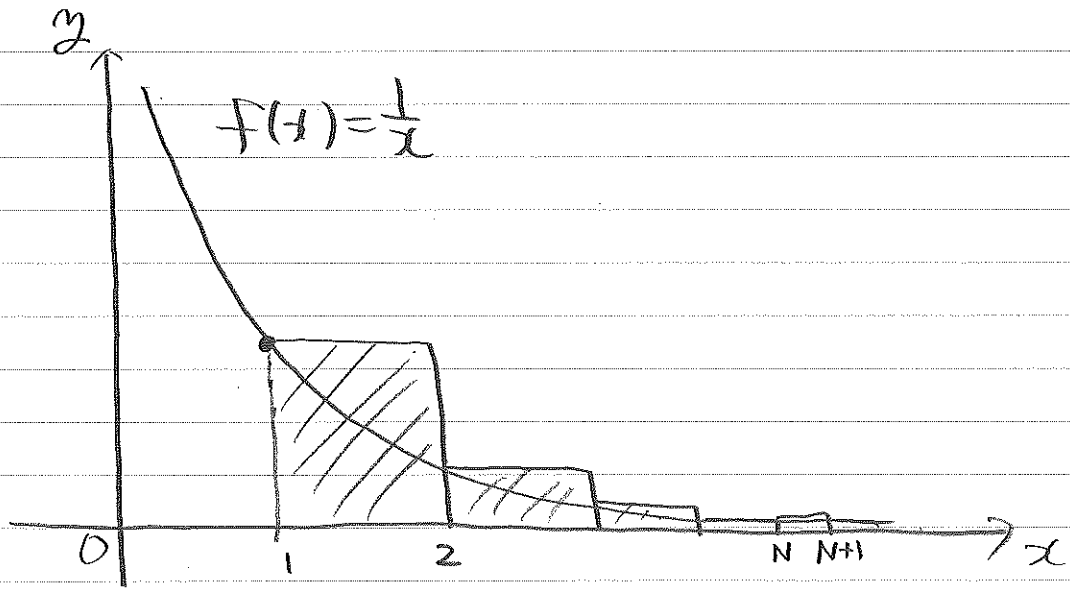
・ $s > 1$ のとき、

$$S_N \leq \lim_{N \to \infty}\left(1 + \frac{1}{1-s}(N^{1-s} - 1)\right) = \frac{1}{s-1}$$

つまり、S_N は上に有界で、

$\lim_{N \to \infty} S_N$ は収束する。

・ 特に、$s = 1$ のとき、



$$\log(N+1) = \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx \leq S_N$$

$N \to \infty$ とすると、$\log(N+1) \to \infty$.

つまり $\lim_{N \to \infty} S_N$ は発散する。

5

No.

まとめて　$s>1$ のとき、S_N は収束し、
$s\leq 1$ のとき、S_N は発散する。