数学Ⅰ 2019　レポート9回目

問

$$I = \iiint_D \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\,dy\,dz$$

$$D = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 ,\ x,y,z \geq 0 \}$$

極座標，$x = r \sin\theta \cos\varphi$，$y = r \sin\theta \sin\varphi$，$z = r \cos\theta$ に変換する。

ヤコビアン は $r^2 \sin\theta$ であるので、

$$I = \iiint_{\tilde{D}} \sqrt{1-r^2}\, r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\tilde{D} = \left\{ (r,\theta,\varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{\boxed{(1)}},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\boxed{(2)}} \right\}$$

$$I = \frac{\pi^{\boxed{(4)}}}{\boxed{(3)}}$$

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 2$

$\boxed{(3)} = 32$

$\boxed{(4)} = 2$

$$I = \iiint_{\tilde{D}} \sqrt{1-r^2}\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\tilde{D} = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

変数分離しているので、

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r^2 dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\varphi$$

さて

$J = \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r^2 dr$ は、$r = \sin\theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

と変換すれば、 $\frac{dr}{d\theta} = \cos\theta$,

$\sqrt{1-r^2} = \cos\theta$ であるから、

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \times \sin^2\theta \, d\theta$$

$(\cos\theta\sin\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$ より、

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\varphi = \left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{16} \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{\pi^2}{32}}$$