数学エレポート2019（3回目）

問

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$k(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\boxed{(1)}$ $\boxed{(2)}$ $\boxed{(3)}$ $\boxed{(4)}$ に 1〜8の数字を入れなさい。

$f(x,y)$ は原点で $\boxed{(1)}$ をみたす。

$g(x,y)$ 〃 $\boxed{(2)}$ 〃

$h(x,y)$ 〃 $\boxed{(3)}$ 〃

$k(x,y)$ 〃 $\boxed{(4)}$ 〃

	連続	偏微分可能	全微分可能
1	○	○	○
2	○	○	×
3	○	×	○
4	○	×	×
5	×	○	○
6	×	○	×
7	×	×	○
8	×	×	×

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 1$

$\boxed{(3)} = 6$

$\boxed{(4)} = 1$

$f(x,y)$は授業で示したように、1 (0,0,0)

$\boxed{f(x,y)}$

連続性 ○

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0 = f(0,0)$$

連続

偏微分 ○

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同様に $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

全微分 ×

剰余項 $\varepsilon(0,0)$ は、

$$f(\Delta x,\Delta y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + \varepsilon(0,0)$$

$$f(\Delta x, \Delta y) = 0 + 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon(0,0)$$

よって

$$\varepsilon(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

さて、 $\Delta x = r\cos\theta$
$\Delta y = r\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{\varepsilon(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\varepsilon(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \cos\theta\sin\theta$$

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan\theta$

これは θ に依存している。

よって $\displaystyle\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\varepsilon(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ は存在しない。

よって、全微分は不可能、

$\boxed{g(x,y)}$

<u>連続性</u> ○

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin^2\theta = 0 = g(0,0)$$

<u>偏微分</u> ○

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(\Delta x,0)-g(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{g(0,\Delta y)-g(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

全微分 ○

剰余項 $\varepsilon(0,0)$ は、

$$g(\Delta x, \Delta y) = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\Delta y + \varepsilon(0,0)$$

$$= 0 + 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon(0,0)$$ より、

$$\varepsilon(0,0) = g(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

さて、$\Delta x = r\cos\theta$, $\Delta y = r\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{\varepsilon(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{r^3}{r^2}\cos\theta\sin^2\theta = r\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\varepsilon(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0$$

よって全微分可能。

$\boxed{h(x,y)}$

連続 ×

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta y \to 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta}} h(\Delta x, \Delta y) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \cos\theta\sin\theta$$

これは θ に依存している.

よって $\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} h(\Delta x, \Delta y)$ は存在しない.

全微分 ×

不連続であるから.

偏微分 ○

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(\Delta x, 0) - h(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同様に $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$