微積分解法 2022 （2回目）

定理1.3

有界な単調数列は実数に収束する.

例

$0 \leq a_1 \leq 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ ?$$

$a_1 = a$

$$a_2 = \frac{a_1^2+1}{2} = \frac{a^2+1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2^2+1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1\right\} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2+2a+1+4}{4} = \frac{1}{8}(a^2+2a+5)$$

$\vdots$

$a_n = \ ?$

$\boxed{\{a_n\}\text{は有界単調列である.}}$

(1) 有界であること.

$$\boxed{0 \leq a_n \leq 1 \quad (n=1,2,3,\cdots)} \quad \cdots (☆)$$

(☆)を帰納法で示す.

$n=1$ のとき、仮定 $0 \leq a_1 \leq 1$ により OK.

ある n まで (☆)が正しいならば、

漸化式により、

$$0 \leq a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2} \leq 1 .$$

(2) 単調なこと.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+1}{2} - a_n = \frac{1}{2}(a_n-1)^2 \geq 0$$

$$\therefore \ a_{n+1} \geq a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

③

定理1.3 により　$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$　が存在.

さて, 漸化式　$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$　で $n\to\infty$ とすると,

$$\alpha = \frac{\alpha^2+1}{2}$$

つまり　$(\alpha-1)^2 = 0$　∴ $\underline{\alpha = 1}$

一般項 $\{a_n\}$ は分からないが $\lim_{n\to\infty} a_n$ は分かる.

レポート1

$a_1 > 0$, $a_{n+1} = 1/(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{(1)}$ が存在するならもとめよ.

存在しないなら　$\boxed{(1)} = 100$ を入力しなさい.

ヒント　$\frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{a_n}$

④

$a_1 > 0$

$a_2 = 1/a_1 > 0$

$a_3 = 1/a_1+a_2 > 0$

$=$

$a_{n+1} = 1/a_1+\cdots+a_n > 0$

$\boxed{a_n > 0 \quad (n=1,2,3,\cdots)}$

さて、

$a_{n+1} = 1/\underbrace{a_1+\cdots+a_{n-1}}+a_n$, $a_n = 1/a_1+\cdots+a_{n-1}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+a_n}$$

$\therefore \boxed{\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n}+a_n}$ が成立.

$$a_n - a_{n+1} = a_n a_{n+1}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$
$$= a_n^2 a_{n+1} > 0$$

よって $\boxed{a_n > a_{n+1} \quad (n=1,2,3,\ldots)}$ 単調減少.

まとめて

$$\underline{a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > 0}$$

$\{a_n\}$ は有界な単調数列.

定理1.3により $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在.

続きはレポート.

レポート.2

$a_1=2,\quad 2a_{n+1}a_n=a_n^2+2$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\boxed{12}}$ が存在するなら もとめよ。

存在しないなら $\boxed{12}=100$ を入力しなさい。

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}-\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2a_n}(a_n^2-2\sqrt{2}a_n+1)$$
$$=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{2})^2\geq 0$$
?

$$\boxed{a_n\geq\sqrt{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)}$$

$n=1$ のとき、

$a_1=2\geq\sqrt{2}$　…　帰納法

7

$$\boxed{a_n \geq a_{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2) \geq 0 \end{aligned}$$

$(\because\ a_n \geq \sqrt{2})$.

$$\underline{a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \sqrt{2}}$$

$\{a_n\}$は有界な単調数列.

定理1.3により$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$が存在…

あとはレポート.

級数（無限級数）

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

例

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \quad (N \to \infty)$$

レポート. 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(3)}}$$

例

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{137}{300}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})} = \frac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18}$$

無限個の和だからといって ∞ とは限らない。

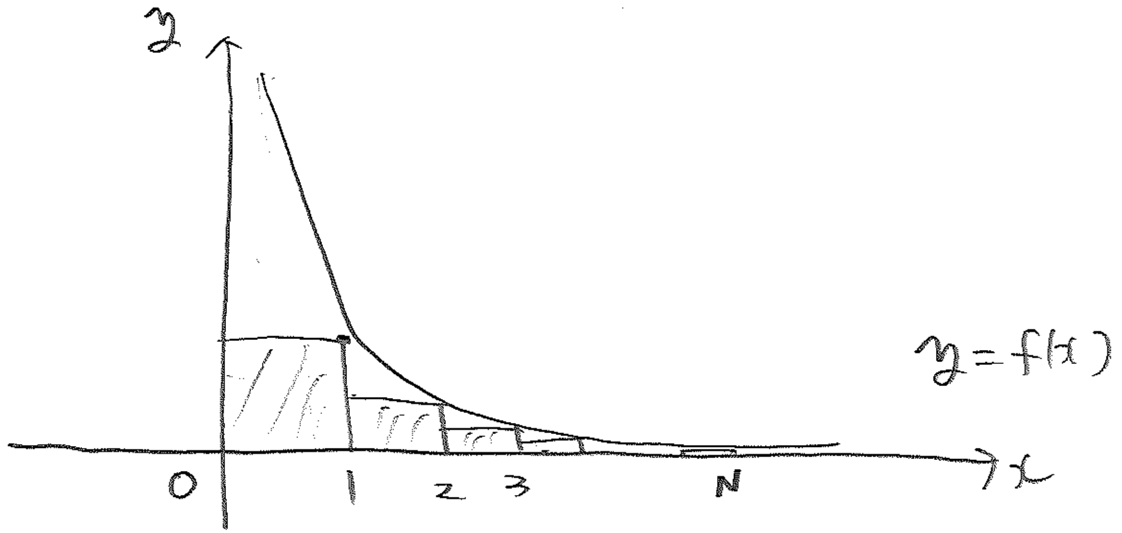
例

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \log 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}}$$

いずれ学ぶ

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1)}$$

$y = f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ と比較



$$0 \leq S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\, dx = 1 + \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_1^N$$

$$S_N \leq S_{N+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\alpha} N^{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha} \to 1 - \frac{1}{1-\alpha}$$

$\underline{\alpha > 1 のとき.}$

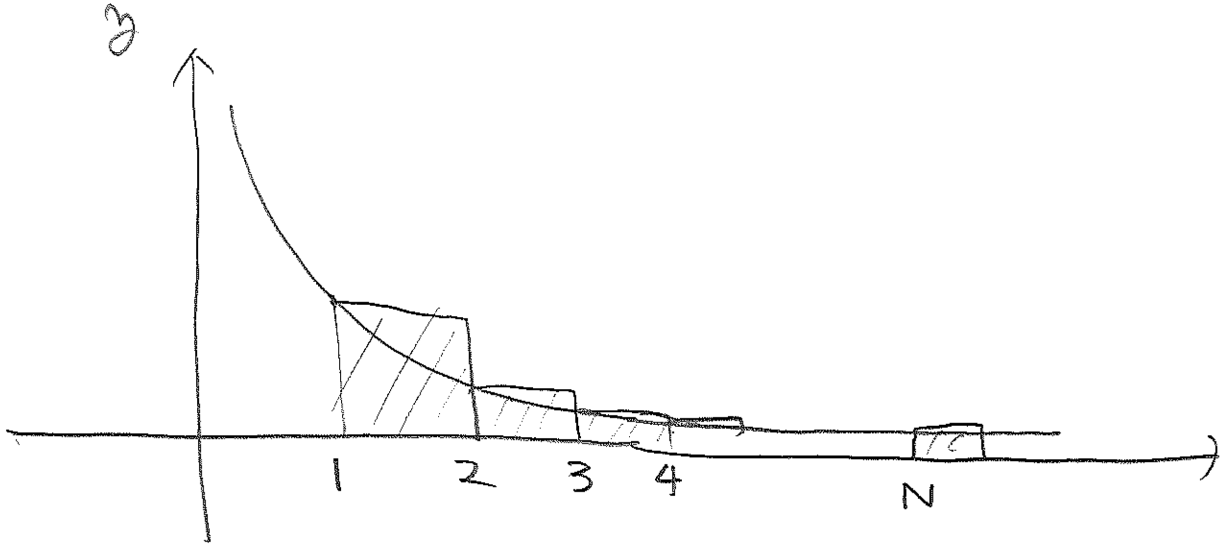
$\{S_N\}$ は有界な単調数列

定理1.3により,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 1) \text{ が存在.}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ と比較



$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

$$\parallel$$

$$[\log x]_1^{N+1} \to \infty \quad (N \to \infty)$$

$$\therefore \quad \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \overbrace{+ \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}}^{\text{正}}$$

$$S_{2N} \leqq S_{2N+2}$$

$$S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-1} \underbrace{- \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1}}_{\text{負}}$$

$$S_{2N+1} \geqq S_{2N+3}$$

$$S_1 \geqq S_{2N+1} > S_{2N} \geqq S_2$$

S_{2N} は有界な単調増加列

S_{2N+1} 〃 単調減少列

$\alpha = \lim_{N\to\infty} S_{2N}$, $\beta = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1}$ が存在.

$$S_{2N+1} - S_{2N} = \frac{1}{2N+1} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

$$\therefore \quad \alpha = \beta$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ は収束する。

例

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

具体的な値については
より詳細な検討が必要。

レポート 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \boxed{(5)}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$