微分積分解法 2022 (小島クラス)

成績

出席点でもある

- レポート(Webclass) 5点×10回＝50点
- 中間テスト 25点
- 期末テスト 25点

計 100点

60点以上合格

教科書 「微分積分入門」 しょう華房

微積分解法 2022 (1回目)

§1. 数列と関数の極限

数列とその極限 高校の復習からはじめる。

実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義を教科書で確認のうえ、

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-7n)$$

を考える。$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} 7n = +\infty$ であるので、あらっぽくは、

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-7n) = +\infty - \infty = ?$$

となり、もう少し精密に考える必要がある。

$$n^2-7n = n(n-7)$$

と共通因子でくくれば、

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(n-7) = +\infty$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-7n) = +\infty .$$

共通因子でくくるという考えは、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^2+1}$$

に対しても使える. 分母分子を n^2 で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

レポート1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+5}{n^2+2n} = \boxed{(1)}$$

(1)に数字を入力.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = +\infty - \infty = ?$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

レポート2

$\lim_{n\to\infty}(an+b-\sqrt{n^2-2n}) = 2$ であるとき、

定数 a, b の値をもとめなさい。

$a = \boxed{(2)}$, $b = \boxed{(3)}$

以上のような「不定形」な数列の極限は、

① 整式 − 整式 ($\infty - \infty$)

共通因子でくくる.

② $\dfrac{\text{整式}}{\text{整式}}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

共通因子で分母・分子を割る.

③ 無理式

有理化して①, ②に帰着.

大凡こんな感じ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

は、分子が $n \to \infty$ で無限和になってしまう. $\dfrac{\infty}{\infty} = ?$

$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ であるから、

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

レポート3. 次の極限をもとめよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}=\frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}$$

既約分数

高校数学を復習しました。

具体的に計算することが中心でした。

大学数学では、「存在」について考えます.

例

$$0 \leq a_1 \leq 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2} \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ とする。}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ をもとめよ.

高校では、a_n を具体的に書き下し、それを活用して、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を計算する訳です.

しかし、$a_n = \cdots$?

そもそも $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するのであろうか?

定義 1.1.

$\{a_n\}$ 実数列

単調増加数列 $\iff a_n \leq a_{n+1}$

単調減少数列 $\iff a_n \geq a_{n+1}$

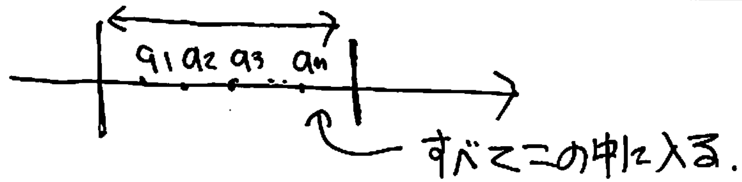
単調数列 $=$ 単調増加数列 $+$ 単調減少数列

<u>例</u> $a_n = \frac{1}{n}$ 単調減少数列

定義 1.2.

$\{a_n\}$ が <u>有界</u>（ゆうかい）

$\iff$ ある定数 K が存在し、$|a_n| \leq K \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$



例

$a_n = \frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\{a_n\}$は有界．　　単調減少．

$b_n = n^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\{b_n\}$は有界ではない。　単調増加．

定理 1.3.

有界な単調数列は実数に収束する．

実数の完備性（かんびせい）

来週に続く．