

数学 I 2022

◎

成績	
ミニレポート (webclass)	4点 × 10回 = 40点
中間テスト	30点
期末テスト	30点
	計 100点

教科書

キャンパスゼミ

演習 微分積分



60点以上が合格

数学I 2022

①

§1. 2変数関数の微分

§2.1. 2変数関数の極限と連続性.

1変数関数の復習から始める.

例

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 0$$

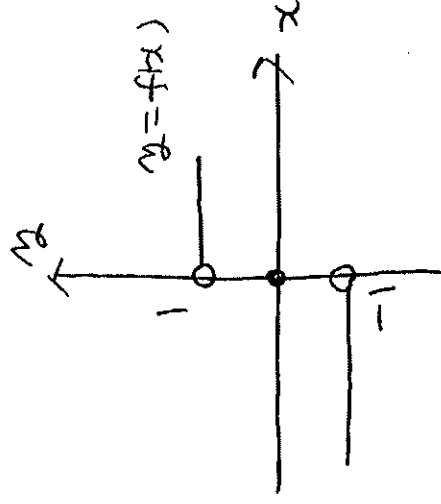
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ではないので、

$f(x)$ は $x=0$ で不連続.

と書ける.



②

変数関数は、極限操作 $x \rightarrow a$ において、

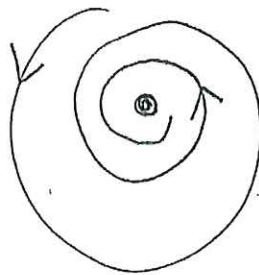
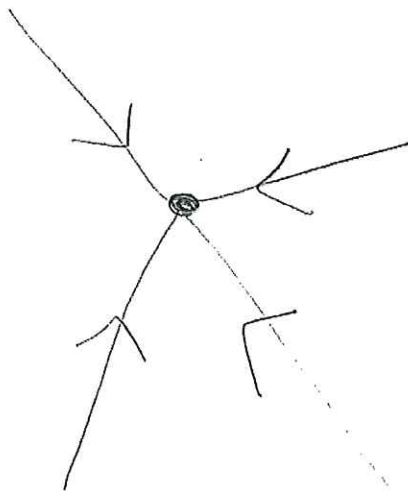
左から か 右から



かの2通りしか実質的にないので、あつかいやすい。
しかし、

2変数関数の極限は、

そこが難しい!



色々な近づけ方 (無限通り)

がある。

(3)

レポート. 1

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0) \quad \text{とする.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{(1)}$$

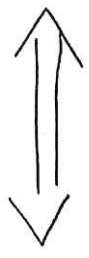
$f(x)$ は $x=0$ で定義されていなくても、

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \neq 0 \quad \text{で} \quad x \rightarrow 0 \quad \text{とするならば}$$

意味なので問題無い。

定義1

$f(x,y)$ について、点 (x,y) が xy 平面の
どのようなルートを 経て、点 (a,b) に近づいても、
 $f(x,y)$ が定数 c に近づくと、ただし、 $(x,y) \neq (a,b)$.



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = c$$

例

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 y^2} = ?$$

• 具体的に x 軸 $(x,0)$ を $x \rightarrow 0$ としてみます。

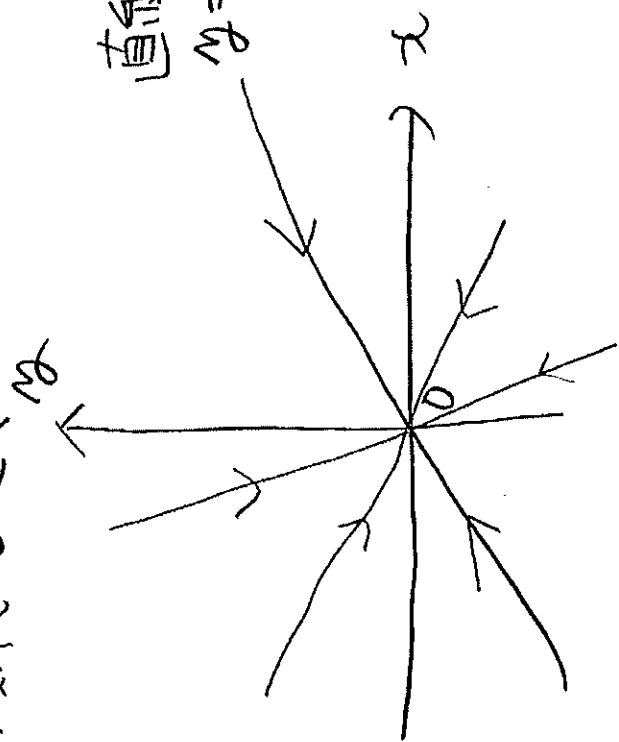
$$\frac{x^3 y}{x^2 y^2} = 0 \quad \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 y^2} = 0$$

同様にして、

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 y^2} = 0$$

⑤

もろくし一般化して、 α



直線
 $y = mx$ 上之 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と対応.

$$\frac{x^3 y}{y^2 + x^2} \Big|_{y = mx} = \frac{mx^4}{m^2 x^2 + x^2} = \frac{mx^2}{m^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

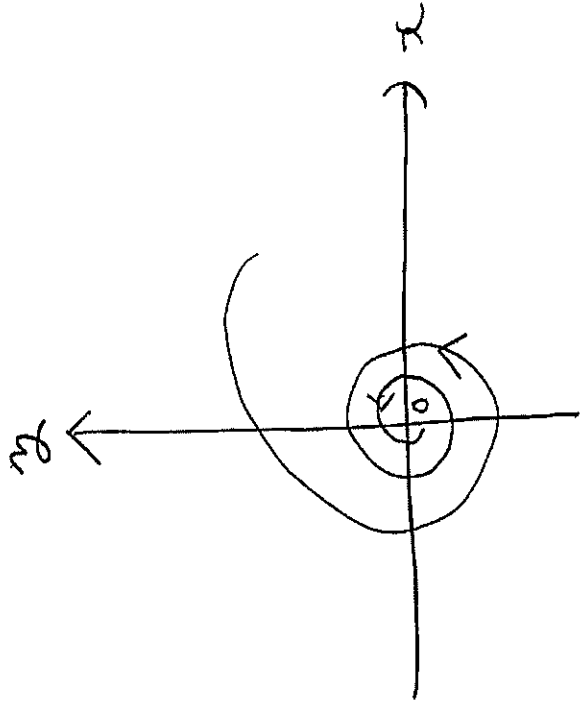
$(\neq 1)$

$$|T_m| = \frac{x^3 y}{y^2 + x^2} = 0$$

$(0, 1) \in (a, 1)$
 $\alpha = m = \alpha$

11

⑩



この螺旋が近づくとときは、まだ論じていません。
どうしよう。

極座標 $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ を用いましょう。

$$(r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

7

原点からの距離 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r$

により、角度 $\theta = \theta(r)$ が定まると思います。

すると、 r と $\theta = \theta(r)$ で原点に近づく ($t \rightarrow +0$) 挙動を全て表せます。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \text{ を、 } \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \text{ に代入すると、}$$

$$\frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r^2 \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = r^2 \cos^3 \theta \sin \theta$$

よって

$$\left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = |r^2 \cos^3 \theta \sin \theta| \leq r^2 \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0)$$

\uparrow $\theta = \theta(r)$ が何であれ $|\cos \theta|, |\sin \theta| \leq 1$ である。

8

$x^2 + y^2 = 10$ 、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 0$$

が示された。

レポート 2

次の極限をもとめなさい。
 極限値が存在しないときは、数字の 100 を
 入力なさい。

• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} =$ (2)

• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y}{x^2 + y^2} =$ (3)

数字を
入力する。

定義 1.2.

関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) に連続

\Leftrightarrow

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

例

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1.$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)}$ は、 $(x,y) \neq (a,b)$ の条件の下で $(x,y) \rightarrow (a,b)$ とする、という意味です。

⑩

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

よって $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続ではない。

不連続.

ヒント. 3

次の関数 f, g のはらう原点で連続なものとはどれか。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

①

○ 連続
× 不連続

1	2	3	4	
○	○	×	×	
○	×	○	×	
4	8			

二の数字を、

(4) に入力。