# 数学Ｃ・期末試験問題（平成３１年１月３０日水曜午後クラス、５８名）

30

**問１．** 次の連立１次方程式系を解け。

$$(1)\quad \begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+y+3z=3 \\ x-y+3z=0 \end{cases}, \qquad (2)\quad \begin{cases} x+2y+3z+2w=6 \\ x+3y+4z+3w=5 \\ x+y+3z=12 \\ 2x+3y+6z+5w=6 \end{cases}.$$

15　15

20

**問２．** 次の行列式の値を求めなさい。

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

10　10

30

**問３．** 次の行列 $A, B$ の逆行列 $A^{-1}, B^{-1}$ を求めなさい。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

15　15

20

**問４．** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えなさい。

（１）行列式 $|A|$ を求めよ。 5

（２）行列 $A$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ。 10

（３）（１）、（２）を用いて $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。 5

# 数C 2018 (木午後クラス)期末解答

## 問1.

(1) 拡大係数行列に行の基本変形をほどこす。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

つまり、

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

$z=t$ とおけば、

$$\begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= 1+t \\ z &= t \end{aligned}$$

ただし $t$ は任意.

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-① \\ ④-2①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-2② \\ ③+② \\ ④+②}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②-③ \\ ④-③}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-④ \\ ②-2④ \\ ③+④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

つまり

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ w = -4 \end{cases}$$

問2

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{\text{③}-7\text{①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -15 \\ 3 & 2 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -75+30 = \underline{-45}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{④}-\text{②}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{③}-\text{①}}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-4}$$

問3

$$(A\ E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②+① \\ ③+①}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①+②]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③ \\ ②-2③}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (E_3 \mid A^{-1})$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B \mid E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -5 & -6 & 1 & & & \\ 1 & 2 & -3 & -1 & & 1 & & \\ 2 & 3 & -5 & -3 & & & 1 & \\ -1 & 0 & 2 & 2 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\substack{① - 3② \\ ③ - 2② \\ ④ + ②}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\substack{① - 3③ \\ ② + 2③ \\ ③ + 2③}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -3 & +2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\substack{② + ④ \\ ③ - ④}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[④ - ①]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[② - 4④]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

⑥

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$= (E_4 \mid B^{-1})$$

$$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

7

問4.

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-2① \\ ③-3①}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 25 = \underline{-18}$$

(2) $A_{ij}$を i行j列をのぞいた行列とする.

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$