数学C・期末試験問題（平成３１年１月３０日水曜午前クラス、７７名）

問１．次の連立１次方程式系を解け。
30

(1) $\begin{cases} 2x-4y-z=3 \\ x-2y-z=2 \\ 3x-6y-2z=5 \end{cases}$, 15 (2) $\begin{cases} x-3y+4z+8w=-5 \\ x-2y+3z+7w=-3 \\ x-6y+8z+14w=-9 \\ x+5y+2z-3w=2 \end{cases}$. 15

問２．次の行列式の値を求めなさい。
20

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$, 10 (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 10

問３．次の行列 A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を求めなさい。
30

$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 15 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -12 \end{pmatrix}$. 15

問４．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えなさい。
20

（１）行列式 $|A|$ を求めよ。 5

（２）行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。 10

（３）（１）、（２）を用いて A の逆行列 A^{-1} を求めよ。 5

・数C 2018 （水午前クラス）期末解答

問1.

(1) 拡大係数行列を変形する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-2② \\ ③-3②}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②+① \\ ③-①}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

つまり $z=-1$
$x-2y=1$

$y=t$ とおくて,

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad (t\text{は任意})$$

(2)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -3 & 4 & 8 & -5 \\
1 & -2 & 3 & 7 & -3 \\
1 & -6 & 8 & 14 & -9 \\
1 & 5 & 2 & -3 & 2
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-① \\ ④-①}]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -3 & 4 & 8 & -5 \\
0 & +1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & -3 & 4 & 6 & -4 \\
0 & 8 & -2 & -11 & 7
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{①+3② \\ ③+3② \\ ④-8②}]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 6 & -3 & -9
\end{array}\right)
\xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 2 & -1 & -3
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②+③ \\ ④-2③}]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -7 & -7
\end{array}\right)
\xrightarrow[④\left(-\frac{1}{7}\right)]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{①-2④ \\ ②-2④ \\ ③-3④}]{}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

問2、

(1)

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{②}+\text{①} \\ \text{③}+\text{①}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(5-2) = \underline{-3}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{②}-2\text{①} \\ \text{③}-3\text{①} \\ \text{④}-4\text{①}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{②}-2\text{①} \\ \text{③}-7\text{①}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-144-16) = \underline{160}$$

問3 逆行列

4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{②}-2\text{③}]{\text{①}+5\text{③}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}\times(-1)]{\text{①}+2\text{②}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\text{①}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longmapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[\substack{② - ① \\ ③ + ① \\ ④ - ①}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[\substack{① - ② \\ ③ + ② \\ ④ - ②}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[\substack{① + ③ \\ ② + ③ \\ ④ - ③}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[\substack{① + 5④ \\ ② + 10④ \\ ③ + 6④}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 2 & -10 & -4 & 5 \\ & 1 & & & -1 & -18 & -9 & 10 \\ & & 1 & & 0 & -11 & -5 & 6 \\ & & & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

問4.

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-2① \\ ③-3①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 7-25 = \underline{-18}$$

(2) A_{ij}を i行よ列 をのぞいた行列とする.

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-9 = -7$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$