# 数学Ｃ・中間試験問題（平成３０年１２月２１日クラス、７２名）

問１．15 （１） 複素数 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を極形式で表せ。 10

（２） 複素数 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^9$ をもとめよ。 5

問２ 30 次の連立１次方程式系を解け。

$$(1)\quad \begin{cases} 2x-4y-z=3 \\ x-2y-z=2 \\ 3x-6y-2z=5 \end{cases}, \qquad (2)\quad \begin{cases} x-3y+4z+8w=-5 \\ x-2y+3z+7w=-3 \\ x-6y+8z+14w=-9 \\ x+5y+2z-3w=2 \end{cases}.$$

15 15

問３． 20 次の行列のランクを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

10 10

問４． 15 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

（１） $A-2B$ 5

（２） $AC$ 5

（３） $CB$ 5

問５． 20 行列 $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。行列 $P^{-1}$ は、$PP^{-1}=P^{-1}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす２次正方行列とする。

（１） 行列 $P^{-1}$ を求めなさい。 5

（２） $P^{-1}AP$ を計算しなさい。 5

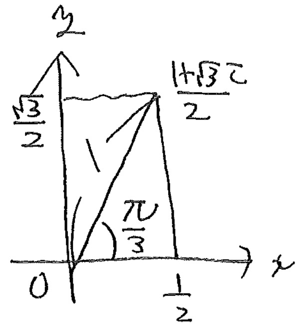
（３） $(P^{-1}AP)^n$ を計算しなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。 5

（４） $A^n$ を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。 5

# 数学C　2018　解答例

## 問1.

(1)




$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \underline{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

(2)

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^9 = \cos\left(\frac{9}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{3}\pi\right) = \underline{-1}$$

## 問2.

(1) 拡大係数行列を変形する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}-3\text{②}]{\text{①}-2\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}+\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

つまり　$z = -1$
$x - 2y = 1$

$y = t$ とおくて.

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad (t\text{は任意})$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 8 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 7 & -3 \\ 1 & -6 & 8 & 14 & -9 \\ 1 & 5 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-① \\ ④-①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & -11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+3② \\ ③+3② \\ ④-8②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②+③ \\ ④-2③}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[④(-\frac{1}{7})]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-2④ \\ ②-2④ \\ ③-3④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{①+2③ \\ ②-2③}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

主因子3個、よって $\underline{\mathrm{rank}(A) = 3}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{①-2② \\ ④-②}]{} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{①-4③ \\ ②+2③ \\ ④-③}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{①+② \\ ③\times(-1) \\ ④\times(-\frac{1}{2})}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{①\times\frac{1}{2} \\ ②-④}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{②+3① \\ ③-① \\ ④-2\times①}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

主成分4個

よって $\underline{\mathrm{rank}\,B = 3}$

問4.

(1) $A-2B$

$$=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&6\\0&-2&4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0&-3&-6\\1&5&-5\end{pmatrix}}$$

(2)

$$AC=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&2\\2&7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+1 & 6+2\\-1+3-2 & 3+6-7\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1&8\\0&2\end{pmatrix}}$$

(3)

$$CB=\begin{pmatrix}-1&3\\1&2\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2-3 & -3+6\\1 & 2-2 & 3+4\\2 & 4-7 & 6+14\end{pmatrix}$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}-1&-5&3\\1&0&7\\2&-3&20\end{pmatrix}}$$

問5

(1) $P^{-1} = \frac{1}{-3+4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2)
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)
$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

(4) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP$
$$= P^{-1}A^nP$$

$\therefore\ A^n = P \times (P^{-1}AP)^n \cdot P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n & 2\cdot 3^n \\ -2\cdot 2^n & -1\cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n + 4\cdot 3^n & 6\cdot 2^n + 6\cdot 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -4\cdot 2^n - 3\cdot 3^n \end{pmatrix}$$