数学II・２０１８・期末試験予想問題？

問１．多項式のなすベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ のベクトル $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を以下の式で定める．

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = 2x^2 + x, \quad f_3(x) = x^2 + x - 1.$$

（１）$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は一次独立か調べなさい．

（２）$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ で生成される部分ベクトル空間を W とする．このとき $\dim W$ を求めなさい．

問２．（１）線形写像の定義を述べなさい．

（２）関数 $f(x) = 3x,\ g(x) = x^3$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への線型写像であるか、理由も付して Yes か No か答えなさい．

問３．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）A の固有多項式 $g_A(t) = |tE_2 - A|$．

（２）A の全ての固有値 λ．

（３）各固有値 λ に対する A の固有空間 $W(\lambda; A) = \{x \in \mathbf{R}^2 | Ax = \lambda x\}$

（４）$A^n\ (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$．

問４．行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ に対して次を求めなさい．

（１）B の固有多項式 $g_B(t) = |tE_3 - B|$．

（２）B の全ての固有値 λ．

（３）各固有値 λ に対する B の固有空間 $W(\lambda; B) = \{x \in \mathbf{R}^3 | Bx = \lambda x\}$．

（４）B に対し変換行列 P を求め、B を対角化しなさい．

問５．$M(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ とする．$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とおく．ただし $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とする．$M(2, \mathbf{R})$ から $M(2, \mathbf{R})$ への線形写像 $T_B : X \to XB$ の表現行列を、

基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して求めなさい．

問1.

(1) $f_2(x) - f_1(x) = x^2 + x - 1 = f_3(x)$.

よって一次独立ではない。

(2) (1)により、Wは $f_1(x), f_2(x)$ で生成されるベクトル空間でもある。

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(c_1 + 2c_2)x^2 + c_2 \cdot x + c_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

つまり $f_1(x), f_2(x)$ は一次独立。

よって $\dim W = 2$

問2.

(1). U, V: ベクトル空間

写像 $T: U \to V$ が線型写像

$$\Longleftrightarrow$$

(1) すべての $u_1, u_2 \in U$ に対し、

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

(2) すべての $c \in \mathbb{R}$, $u \in U$ に対し

$$T(cu) = cT(u)$$

(2) $f(x)$: Yes

- $f(x_1+x_2) = 3(x_1+x_2)$

  $f(x_1)+f(x_2) = 3x_1+3x_2$

- $f(cx) = 3cx$

  $cf(x) = c3x$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

$g(x)$: No

- $g(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^3$

  $\neq$

  $g(x_1)+g(x_2) = x_1^3+x_2^3$

- $g(cx) = (cx)^3$

  $\neq$

  $cg(x) = cx^3$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

問3 のAは教科書p.152と同じなので
略解とする.

(1) $g_A(t) = |tE_2 - A|$

$$= \left| \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix}$$

$= (t-2)(t-4) - 3$
$= t^2 - 6t + 8 - 3$
$= \underline{t^2 - 6t + 5}$

(2) $g_A(t) = (t-1)(t-5) = 0$
を解いて.

固有値 $\underline{\lambda = 1, 5}$

(3) $W(1; A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = x\}$

$= \left\{ c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ 略解

(4) $W(5; A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = 5x\}$

$= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ 略解.

(5)

$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

$P^{-1} = \frac{1}{-3-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$

$\parallel$

$P^{-1}A^nP$

$\therefore\ A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & -3+3\cdot 5^n \\ -1+3\cdot 5^n & 1+3\cdot 5^n \end{pmatrix}$

問4. 教科書 p.154 と同じ行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 5

(1) $g_B(t) = |tE_3 - B| = \underline{(t-3)(t-2)^2}$

(2) $g_B(t) = 0$ を解いて、
固有値 $\underline{\lambda = 2, 3}$

(3) $W(2; B) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$W(3; B) = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

(4) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。これが変換行列。

$P^{-1}BP = \underline{\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}}$

問5.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

とおく.

$$T_B(e_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&0\end{pmatrix}=\alpha e_1+\beta e_2$$

$$T_B(e_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\0&0\end{pmatrix}=\beta e_1+\alpha e_2$$

$$T_B(e_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\alpha e_3+\beta e_4$$

$$T_B(e_4)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\\beta&\alpha\end{pmatrix}=\beta e_3+\alpha e_4$$

$$\begin{pmatrix}T_B(e_1)&T_B(e_2)&T_B(e_3)&T_B(e_4)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3&e_4\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha&\beta&&\\\beta&\alpha&&O\\\hline &&\alpha&\beta\\O&&\beta&\alpha\end{array}\right)\quad\cdots(☆)$$

$$\begin{cases}X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4\\[2mm] Y=T_B(X)=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4\end{cases}$$ とする.

$$\begin{pmatrix}T_B(e_1)&T_B(e_2)&T_B(e_3)&T_B(\cancel{e}_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=T_B(X)=Y=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3&e_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

(※) を $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ にかけると、

$$(e_1 e_2 e_3 e_4)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = (e_1 e_2 e_3 e_4)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ \beta & \alpha & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ \beta & \alpha & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

つまり表現行列は、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ \beta & \alpha & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right)$$