数学II・２０１８・中間試験予想問題？

問１．次の連立１次方程式を解きなさい。

$$x + y + z = 20$$
$$4x + 8y + 10z = 168$$
$$-x - y + z = 0.$$

問２．次の行列式を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a^2 & b \\ 0 & a^3 & b^2 \end{vmatrix}.$$

問３．次の行列Ａの逆行列を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

問４．線型空間 $V = \mathbf{R}^3$ の次の部分集合 S_1, S_2 は部分ベクトル空間であるか調べなさい。

$$S_1 = \{x \in \mathbf{R}^3 | |x| = 1\}, \quad S_2 = \{x \in \mathbf{R}^3 | Ax = 0\}.$$

ただし、$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$. A は実３次行列.

問５．（１）$\mathbf{R}[x]$ を多項式全体とする。次の多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \mathbf{R}[x]$ の組は一次独立か調べなさい。

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2, \quad f_2(x) = 2 + 3x + 2x^2, \quad f_3(x) = 1 + 2x + x^2.$$

（２）ベクトルの組 a_1, a_2, a_3, a_4 はベクトル空間 V の基底とする。ベクトルの組 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_1$ はベクトル空間 V の基底か調べなさい。

裏に問６があります。

問６．ベクトル空間 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元 $\dim W_1, \dim W_2, \dim(W_1 \cap W_2)$ を求めなさい。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

解答例

問1. (略解)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

問2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+2①\\③-3①}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix}$$

1列を軸に展開

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = -50+22 = \underline{-28}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a^2 & b \\ 0 & a^3 & b^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a^2 & b \\ a^3 & b^2 \end{vmatrix} = a(a^2b^2 - a^3b)$$

$$= \underline{a^3b(b-a)}$$

問3 (略解)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問4. ・S_1について.

$x \in S_1$, $c \in \mathbb{R}$ $(c \neq \pm 1)$ ならば

$|cx| = |c||x| = |c| \neq 1$

つまり　$cx \notin S_1$.

スカラー倍について閉じていないので、

部分ベクトル空間ではない.

・S_2について.

$x_1, x_2 \in S_2$　ならば

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$

よって　$x_1 + x_2 \in S_2$

$x \in S_2$, $c \in \mathbb{R}$ ならば.

$A(cx) = cAx = c \cdot 0 = 0$

よって　$cx \in S_2$.

つまり S_2は部分ベクトル空間.

問5. (1)

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$$ ならば、

$$c_1(1+x+2x^2) + c_2(2+3x+2x^2) + c_3(1+2x+x^2) = 0$$

$$(c_1+2c_2+3c_3) + (c_1+3c_2+2c_3)x + (2c_1+2c_2+c_3)x^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-2①}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-2② \\ ③+2②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③-2②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$\therefore$ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$は1次独立.

(2) $b_1 = a_1 - a_2$
$b_2 = a_2 - a_3$
$b_3 = a_3 - a_4$
$b_4 = a_4 - a_1$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

$= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + a_4 - a_1 = 0$

よって b_1, b_2, b_3, b_4 は1次従属.

よって基底ではない。

問6

W_1: 拡大係数行列を変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}-\frac{1}{3}\text{②},\ \frac{1}{3}\text{②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t - 7s \\ x_2 = -t + 2s \end{cases} \qquad x_3 = t,\ x_4 = 3s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_1 = 2}$$

W_2: 拡大係数行列を変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}-\text{①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}-2\times\text{②}]{}$$

(6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t - 2s \\ x_2 = -t \end{cases} \quad x_3 = t,\ x_4 = s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_2 = 2}$$

$W_1 \cap W_2$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2 - 3 \cdot 3 \\ 4 - 2 \cdot 3}]{1 - 3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{1 - 4 \cdot 2 \\ 3 + 2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\dim W_1 \cap W_2 = 1}$$