数学ＩＩＩ　期末試験問題（９２名、２０１９年２月４日）

問１． 次の線積分の値をもとめよ。ただし、積分路 C は、原点を中心とする半径 1 の反時計周りの円とする。

10

$$\int_C |z| dz.$$

問２． 関数 $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$, $g(z) = \frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ とする。次の留数を求めなさい。

30

$$\mathrm{Res}[f(z);0], \quad \mathrm{Res}[g(z);0], \quad \mathrm{Res}[g(z);1].$$

10　10　10

15

問３． 関数 $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ とする。

（１）$|w| < 1$ のとき、関数 $\frac{1}{1-w}$ の $w = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ。結果のみ記せばよい。 10

（２）（１）を活用して、$f(z)$ の $z = 0$ を中心とするローラン展開を求めよ。 5

30

問４． 複素平面上の有理関数 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-3)}$ の線積分 $I = \int_C f(z) dz$ を、計算しなさい。ただし、積分路 C は、原点を中心とする半径 2 の反時計回りの円とする。

（１）$f(z)$ の特異点の位置を全て書き出せ。（ヒント：３か所） $3 \times 4 = 12$

（２）$f(z)$ の全ての特異点における留数を求めよ。 $3 \times 4 = 12$

（３）積分路 C の内部に入る特異点に留意し、積分 I の値を求めよ。 6

問５． 次の積分

15

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + p\cos\theta} \quad (0 < p < 1).$$

を留数解析で求めよう。

（１）変数変換 $z = e^{i\theta}$ により I を変数 z の積分で表しなさい。 10

（２）（１）を活用して、定積分 I を求めなさい。 5

数III 2018 期末解答例

問1. $C : z = z(\theta) = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\int_C |z| dz = \int_0^{2\pi} |e^{i\theta}| \, i e^{i\theta} d\theta = \left[e^{i\theta} \right]_0^{2\pi} = 1 - 1 = \underline{0}$$

問2.

Cauchy の積分表示

$$h^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{h(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

を用いる。

・ $\mathrm{Res}\,[f(z); 0]$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos\xi}{\xi^3} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\xi)}{\xi^{2+1}} d\xi \qquad \left(\begin{array}{c} h(\xi) = \cos\xi \\ z = 0 \\ n = 2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2!} h^{(2)}(0)$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos\xi) \Big|_{\xi=0} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

- $\mathrm{Res}\,[g(z); 0]$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\xi^3+5}{\xi(\xi-1)^3}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h(\xi)}{\xi}\,d\xi \qquad \left(\begin{array}{l} h(\xi) = \frac{\xi^3+5}{(\xi-1)^3} \\ z = 0 \\ n = 0 \end{array} \right)$$

$$= h(0) = \underline{-5}$$

- $\mathrm{Res}\,[g(z); 1]$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\xi^3+5}{\xi(\xi-1)^3}\,d\xi \qquad \left(\begin{array}{l} h(\xi) = \frac{\xi^3+5}{\xi} = \xi^2 + \frac{5}{\xi} \\ z = 1 \\ n = 2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h(\xi)}{(\xi-1)^{2+1}}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 h(\xi)\Big|_{\xi=1}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(2!\cdot 1 + 5(-1)(-2)\frac{1}{\xi^3}\right)\Big|_{\xi=1}$$

$$= \frac{1}{2!}(2+10) = \underline{6}$$

問3.

(1)

$$\frac{1}{1-w} = 1+w+w^2+\cdots+w^n+\cdots \qquad (|w|<1)$$

(2)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{z} - z\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m} \qquad (|z|<1)$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m+1}$$

問4.

(1)

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-3)}$$

よって

$$z = \pm i,\ 3$$

(2)

- $\mathrm{Res}[f(z); 3]$

$$= \lim_{z\to 3}(z-3)f(z)$$

$$= \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \underline{\frac{1}{10}}$$

- $\mathrm{Res}[f(z); i]$

$$= \lim_{z \to i} (z-i) f(z)$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{1}{(z+i)(z-3)}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{i-3}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{i+3}{(i-3)(i+3)} = \frac{i}{20}(i+3) = \underline{\frac{1}{20}(-1+3i)}$$

- $\mathrm{Res}[f(z); -i]$

$$= \lim_{z \to -i} (z+i) f(z)$$

$$= \lim_{z \to -i} \frac{1}{(z-i)(z-3)}$$

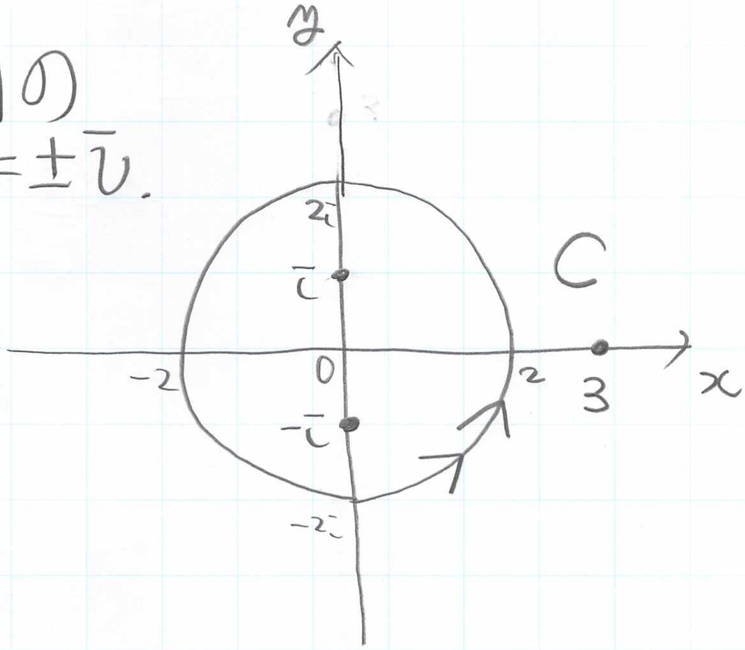
$$= -\frac{1}{2i} \frac{1}{(-i-3)}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{(i-3)}{(i+3)(i-3)}$$

$$= \frac{i}{20}(i-3) = \underline{\frac{1}{20}(-1-3i)}$$

(3)

Cの内側の
特異点は $z=\pm i$.



留数定理により、

$$\int_C f(\xi)d\xi$$

$$= 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z);+i]+\mathrm{Res}[f(z);-i]\right)$$

$$= 2\pi i\left\{\frac{1}{20}(-1+3i)+\frac{1}{20}(-1-3i)\right\}$$

$$= -\frac{\pi i}{5}$$

問5

(1) $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

$dz = i e^{i\theta} d\theta = i z d\theta$

$$I = \int_C \frac{1}{iz} \frac{1}{1 + \frac{p}{2}(z + z^{-1})} dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_C \frac{2}{pz^2 + 2z + p} dz$$

Cはz=0を中心とする半径1の反時計回りの円

(2)

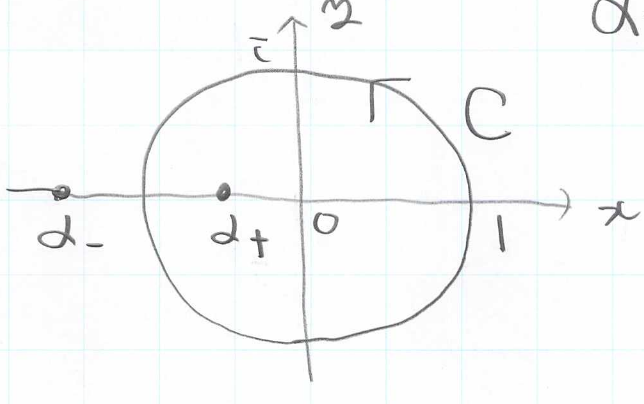
$$I = \frac{1}{ip} \int_C \frac{1}{z^2 + \frac{2}{p}z + 1} dz$$

$z^2 + \frac{2}{p}z + 1 = 0$ の根は,

$z = -\frac{1}{p} \pm \sqrt{D'}$, $D' = \frac{1}{p^2} - 1 = \frac{1-p^2}{p^2}$

$= \frac{1}{p}(-1 \pm \sqrt{1-p^2})$

$\alpha_\pm = +\frac{1}{p}(-1 \pm \sqrt{1-p^2})$ とおく



$$\begin{cases} \alpha_+ \cdot \alpha_- = 1 \\ \alpha_- < \alpha_+ < 0 \end{cases}$$ であるから、

$$\alpha_- < -1 < \alpha_+ < 0$$

つまり C の内側の特異点は、

α_+ 唯一つ。

よって留数定理より、

$$I = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left[\frac{1}{ip(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)}, \alpha_+ \right]$$

$$= \frac{2\pi}{p} \lim_{z \to \alpha_+} (z-\alpha_+) \frac{1}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)}$$

$$= \frac{2\pi}{p} \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} = \underline{\frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}}$$

なお

$$\alpha_+ - \alpha_- = \frac{1}{p}\left(-1+\sqrt{1-p^2}+1+\sqrt{1-p^2}\right)$$

$$= \frac{2}{p}\sqrt{1-p^2}.$$