数学III　中間試験問題（９２名、２０１８年１２月１７日）

問１．　次の複素数の値を $x+iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ の形で表せ。ただし、$i=\sqrt{-1}$ とする。

20

$$\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i), \quad i^{\,i}, \quad \cos\left(i+\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{12}.$$

30

問２．　（１）関数 $f(z)=\bar{z}^2$ の実部を $u(x,y)$、虚部を $v(x,y)$ とする。ただし、$\bar{z}=x-iy$ とする。$u(x,y), v(x,y)$ は、原点以外の任意の点で Cauchy-Riemann の方程式を満たさないことを示しなさい。 15

（２）関数 $u(x,y)=x^2-y^2$ とする。複素数 $z=x+iy$ の関数 $g(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則関数になるように関数 $v(x,y)$ を定めなさい。 15

25

問３．　原点０を始点とし、$1+i$ を終点にする線分を C とする。このとき、積分 $I=\int_C \bar{z}dz$ とおく。ただし、$\bar{z}=x-iy$ とする。

（１）線分 C の１パラメタ表示を求めなさい。 10

（２）積分 I の値を求めなさい。 15

25

問４．　点 $2i$ を中心とする半径２の反時計回りの円を C とする。このとき、積分 $I=\int_C (z-2i)^n dz$ とおく。ただし、$n \in \mathbf{Z}$ とする。

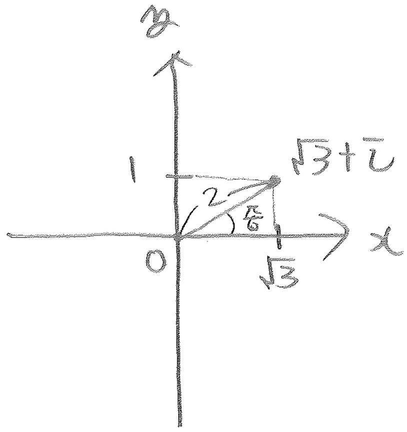
（１）円 C の１パラメタ表示を求めなさい。 10

（２）積分 I の値を求めなさい。 15

・解答例

問1.

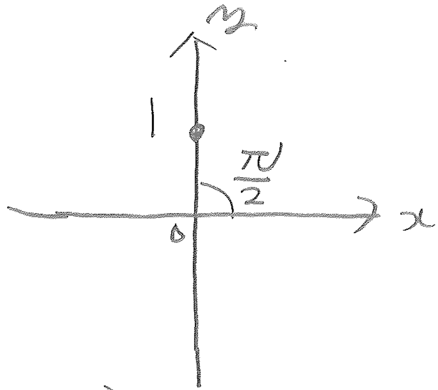
・$\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)$



$=\log 2+\frac{\pi}{6}i$

・$i^i=\exp(i\log i)$

ところで $\log i=\log 1+\frac{\pi}{2}i+2\pi i n$



$=\frac{\pi}{2}i+2\pi i n$

$(n\in\mathbb{Z})$

よって $i^i=\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}i+2\pi i n\right)\right)$

$=\exp\left(-\frac{\pi}{2}-2\pi n\right)$ $(n\in\mathbb{Z})$

・$\cos\left(i+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(e^{i\left(i+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(i+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

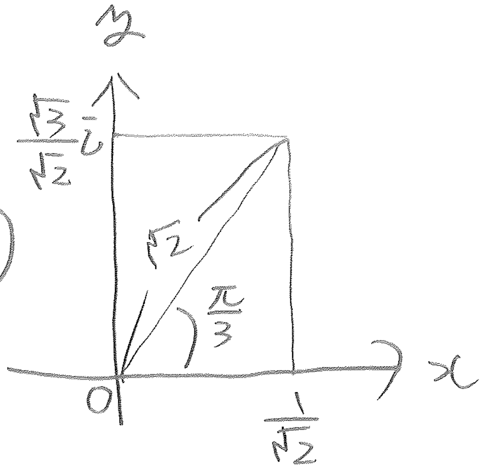
$=\frac{1}{2}\left(e^{-1+\frac{\pi}{2}i}+e^{1-\frac{\pi}{2}i}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(ie^{-1}-ie^{1}\right)$ $\left(\because e^{\frac{\pi}{2}i}=i\right)$

$=\frac{i}{2}\left(e^{-1}-e\right)$

②

- $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$



$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{12} = \sqrt{2}^{12}\left(\cos\frac{12}{3}\pi + i\sin\frac{12}{3}\pi\right)$$

$$= 2^6(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$$

$$= 2^6 = \underline{64}$$

問2.

(1) $f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$

よって $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = -2xy$.

$(x,y) \neq (0,0)$ のとき、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq -2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \neq 2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となり、Cauchy-Riemann の方程式はみたさない。

(2) Cauchy-Riemannの方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \cdots ① \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \cdots ② \end{cases}$$

①より、

$$v(x,y) = 2xy + c(x)$$

($c(x)$はxの関数)

②に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{\partial c}{\partial x}(x) = 2y.$$

よって　$c(x) = C$：定数.

まとめて

$$\underline{v(x,y) = 2xy + C. \ (C：定数)}$$

実際、このとき、$u(x,y)$, $v(x,y)$は多項式なので

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ は連続関数でu, vは、

Cauchy-Riemann方程式をみたす。

よって　$g(z) = u(x,y) + i v(x,y)$は正則.

問3

(1) $C: z(t) = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2)
$$I = \int_C \bar{z}\, dz$$
$$= \int_0^1 \overline{(1+i)t} \times ((1+i)t)'\, dt$$
$$= \int_0^1 (1-i)(1+i)\, t\, dt$$
$$= \int_0^1 2t\, dt = [t^2]_0^1 = \underline{1}$$

問4.

(1) $C: z(\theta) = 2i + 2e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(2)
$$I = \int_C (z-2i)^n\, dz$$
$$= \int_0^{2\pi} (2i + 2e^{i\theta} - 2i)^n\, (2i + 2e^{i\theta})'\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2^n e^{in\theta} \times 2ie^{i\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2^{n+1} i\, e^{i(n+1)\theta}\, d\theta$$

(i) $n=-1$ のとき、

$$I=\int_0^{2\pi} i\, 1\, d\theta = \underline{2\pi i}$$

(ii) $n \neq -1$ のとき、

$$I=\int_0^{2\pi} i\, 2^{n+1} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta$$

$$= i\, 2^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(e^{2\pi i(n+1)} - e^{0}\right) \underline{=0}$$

$$(\because\ e^{2\pi i}=1)$$

まとめて

$$I=\begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n\neq -1). \end{cases}$$