数学Ｉ・２０１８・期末試験（７月２３日、学科混合、８５名）

20

問１ 次の累次積分の積分順序を交換しなさい。ただし、$f(x,y)$ は連続関数とする。

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx.$$

10 10

20

問２ 次の積分を計算しなさい。

$$\int\int_D (x+y)dxdy.$$

ただし、$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \right\}.$

20

問３ （１）極座標変換 $(x,y) = (r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta)$ のヤコビアン $J(r,\theta)$ を求めなさい。 5

（２）積分 $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ の値を求めなさい。 5

（３）次の積分を計算しなさい。

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dxdy.$$

ただし、$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\, x^2+y^2 \le 1\}.$ 10

20

問４ 次の積分を計算しなさい。

$$\int\int\int_D xydxdydz.$$

ただし、$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\, x+y+z \le 1,\ x,y,z \ge 0\}.$

20

問５ （１）極座標変換 $(x,y,z) = (r\ \sin\theta\ \cos\varphi,\ r\ \sin\theta\ \sin\varphi,\ r\ \cos\theta)$ のヤコビアン $J(r,\theta,\varphi)$ を求めなさい。 5

（２）次の積分を計算しなさい。

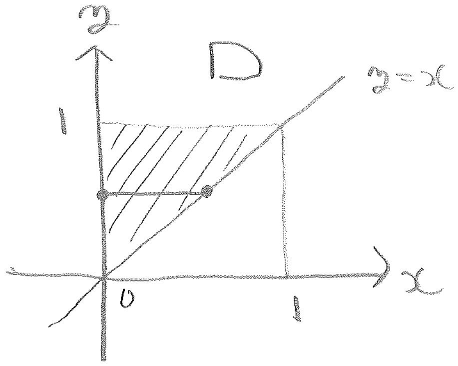
$$\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz.$$

ただし、$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\, x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\}.$ 15

問1.

・ $\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)\,dy \right) dx$

積分領域を図示する。



$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$

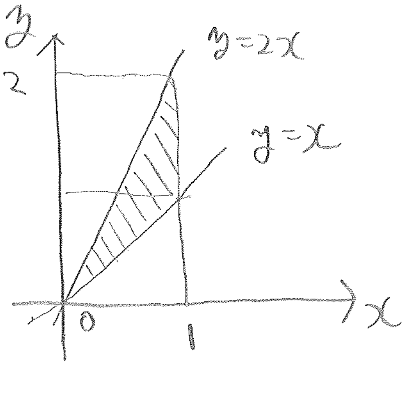
$\ \ = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

よって

$$\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)\,dx \right) dy$$

・ $\int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$

積分領域を図示する。



$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x\}$

$\ \ = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ \frac{y}{2} \leq x \leq y\}$

$\ \ \cup \{(x,y) \mid 1 \leq y \leq 2,\ \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$

よって

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy$$

問2.

$$I=\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)\,dy\right) dx$$

$$=\int_0^1 \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$=\int_0^1 \frac{3}{2}y^2\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

問3.

(1)

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\underline{r}$$

(2)

$$I=\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$

$$=\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{r=0}^{r=1}$$

$$=\underline{1}$$

極座標に変換して計算する。

(3) 積分変数変換公式により、

$$J = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\,dxdy$$

$$= \iint_{\tilde{D}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,drd\theta$$

$$\tilde{D} = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$J = \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\,d\theta$$

$$= 1 \times 2\pi = \underline{\underline{2\pi}}$$

問4.

$$D = \{(x,y,z) \mid x+y+z \leq 1,\ x,y,z \geq 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

よって

$$I = \iiint_D xy\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xy\,dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[xy \cdot z \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \{-x \cdot y^2 + x(1-x)y\}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{x}{3} y^3 + \frac{1}{2} x(1-x) y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x}{3}(1-x)^3 + \frac{x}{2}(1-x)^3 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 \{ (x-1)^4 + (x-1)^3 \} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{5}(x-1)^5 + \frac{1}{4}(x-1)^4 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= -\frac{1}{6}(-1)\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{1}{120}}$$

問5.

(1)

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\cos\theta\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi+r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$+r\sin\theta\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi+r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta$$

$$=\underline{r^2\sin\theta}$$

(2) 積分変数変換公式により

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\tilde{D}} r^3 \cdot r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

ただし,

$$\tilde{D} = \{ (r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta, \varphi \le \frac{\pi}{2} \}.$$

よって

$$I = \int_0^1 r^5\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_{r=0}^{r=1} \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{\pi}{12}}$$