確率統計学・中間試験

（平成２９年１２月２１日、機械システム、１２６名）

問１ 次のデータの期待値 μ と分散 σ^2 を求めなさい。

$$8, 4, 6, 8, 2, 9, 7, 6, 4, 6.$$

問２ ある大学に学生の出生地はA県が４５％、B県が３０％、C県が２０％、D県が５％である。それぞれの県出身者の女子学生の比率は、A県が２５％、B県が４０％、C県が５％、D県が５０％である。この大学の女子学生がA県出身である確率を求めなさい。

問３ １時間に平均３人の来客のある居酒屋に、１時間に２名以上の来客がある確率を求めなさい。何パーセントであるか小数点以下を四捨五入して求めなさい。ただし、$e = 2.718...$ である。

問４ 中間試験は１００点満点で正規分布に従うとする。平均が７０点、標準偏差が１０点であるとき、以下の値を小数点第一位までもとめなさい。

（１） ９５点以上は何パーセントか。

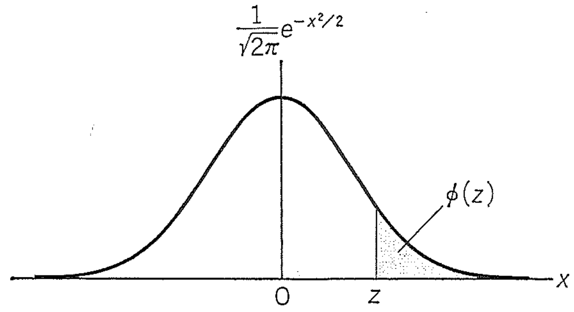
（２） ７０点以上８０点以下は何パーセントか。

問５ 硬貨を１６００回投げるとき、裏があらわれる回数が７８０回以上８４０回以下である確率を中心極限定理で概算しなさい。何パーセントであるか小数点以下を四捨五入して求めなさい。

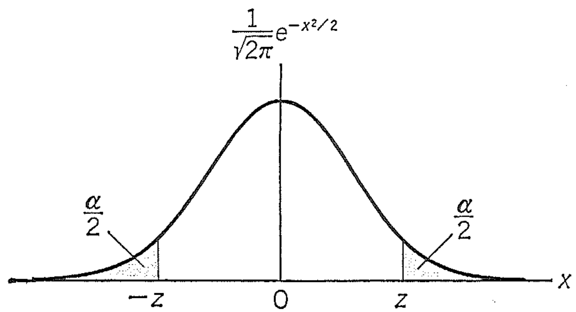
正規分布の積分数値表が裏面にあります。

附表 2　正規分布　$\phi(z)=\int_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ の値

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024



陰影部の面積が $\phi(z)$ の値である



陰影部の面積の和が α となる z の値

α	z
0.01	2.576
0.02	2.326
0.05	1.960
0.10	1.645
0.20	1.282

解答

問1.

$$\mu = \frac{1}{10}(8+4+6+8+2+9+7+6+4+6)$$
$$= \underline{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{10}\{(8-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(2-6)^2$$
$$+(9-6)^2+(7-6)^2+(6-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2\}$$
$$= \frac{1}{10}(4+4+0+4+16+9+1+0+4+0)$$
$$= \underline{4.2}$$

問2.

$P(A) = \frac{45}{100}$　　W：女子である事象

$P(B) = \frac{30}{100}$　　$P(W|A) = \frac{25}{100}$

$P(C) = \frac{20}{100}$　　$P(W|B) = \frac{40}{100}$

$P(D) = \frac{5}{100}$　　$P(W|C) = \frac{5}{100}$

$P(W|D) = \frac{50}{100}$

ベイズの定理により、

$$P(A|W) = \frac{P(W|A)P(A)}{P(W)} = \frac{\frac{25}{100}\times\frac{45}{100}}{P(W)} = \underline{\frac{45}{107}}$$

$$P(W) = P(W|A)P(A)+P(W|B)P(B)$$
$$+P(W|C)P(C)+P(W|D)P(D)$$
$$= \frac{25}{100}\times\frac{45}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{5}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{50}{100}\times\frac{5}{100}$$

問3、

平均 $\mu=3$ 人のポアソン分布に従う。
つまり x $(x=0,1,2,\cdots)$ 人の来客がある確率は、

$$f(x)=\frac{\mu^{x}}{x!}e^{-\mu}$$

2名以上の来客の可能性は、

$$\underline{P}=\sum_{x=2}^{\infty} f(x) = 1-(f(1)+f(0)).$$

$$f(0)+f(1)=e^{-\mu}+3e^{-\mu}=4e^{-3}.$$

$e \fallingdotseq 2.72$ を代入すると

$$\underline{P} \fallingdotseq 1-0.198=0.802$$

よって $\underline{80\ \%}$

問4

$\mu=70$, $\sigma=10$.

(1)

$$P(X\geq 95)=\int_{99}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

変数変換 $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ により、

$$P(X\geq 95)=\int_{2.5=\frac{95-70}{10}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$=0.00621$$ (積分数値表による)

よって $\underline{0.6\%}$

(2)

$$P(70\leq X\leq 80)=\int_{70}^{80}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ により、

$$P(70\leq X\leq 80)=\int_{0}^{1.0=\frac{80-70}{10}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$=\left(\int_0^{\infty}-\int_{1.0}^{\infty}\right) \quad 〃$$

$$=\frac{1}{2}-0.1587$$

$$=0.3413$$

よって $\underline{34.1\ \%}$

問5. 2項分布 Bin(1600, $\frac{1}{2}$) にしたがう.

確率 $P = \sum_{x=780}^{840} {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x}$ $\left(\begin{array}{l} n=1600 \\ p=\frac{1}{2} \end{array}\right)$

$= \sum_{x=780}^{840} {}_{1600}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{1600}$

$n=1600$ は十分大なので、中心極限定理により,

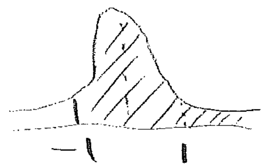
$$P = \int_{780}^{840} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

ただし, $\mu = np = 800$

$\sigma^2 = np(1-p) = 400 = 20^2$

変数変換 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ により、

$$\left(\begin{array}{l} \frac{840-800}{20} = 2 \\ \frac{780-800}{20} = -1 \end{array}\right.$$



$P = \Phi(-1) - \Phi(2)$

$= (1-\Phi(1)) - \Phi(2)$

$= 1 - \Phi(1) - \Phi(2)$

$= 1 - 0.1587 - 0.0228 \doteqdot 0.8185$

約 82%