数学C・期末試験問題（午前クラス６６名、平成２９年１月３１日）

問１． 次の行列の行列式を求めよ。
30

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10 10 10

問２． 次の行列の行列式を求めなさい。
15

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & -2 & 4 \\ -3 & t+1 & -3 \\ -5 & 2 & t-6 \end{pmatrix}.$$

15

問３． 次の行列の逆行列を求めなさい。
30

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

10 10 10

問４． ３次正方行列 A を
25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

とする。

（１）行列 A の行列式を求めよ。 5

（２）n 次正方行列 B に対し B の第 i 行と第 j 列を除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列を $B_{i,j}$ とする。２次正方行列の行列式 $|A_{1,2}|$, $|A_{3,3}|$ を求めよ。 5 5

（３）A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ。 5

（４）A の逆行列 A^{-1} を求めよ。 5

問1.

$$|A| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = \underline{-2}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{(3列)-2(1列)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1行を軸に展開.

$$1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{(2列)-3(1列) \\ (4列)+2(1列)}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & -4 \\ 2 & -7 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

1行を軸に展開

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -7 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} \underset{\substack{(1行)-2(3行) \\ (2行)+2(3行)}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

2列を軸に展開

$$(-1)^{2+3} \times (-1) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-4 = \underline{2}$$

問2.

$$A = \begin{vmatrix} t+3 & -2 & 4 \\ -3 & t+1 & -3 \\ -5 & 2 & t-6 \end{vmatrix} \underset{(1行)+(3行)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} t-2 & 0 & t-2 \\ -3 & t+1 & -3 \\ -5 & 2 & t-6 \end{vmatrix}$$

1行で展開

$$(-1)^{1+1}(t-2)\begin{vmatrix} t+1 & -3 \\ 2 & t-6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(t-2)\begin{vmatrix} -3 & t+1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)\{(t+1)(t-6)+6+(-6)+5(t+1)\}$$

$$= (t-2)(t^2-5t-6+6-6+5t+5)$$

$$= (t-2)(t^2-1) = \underline{(t-2)(t+1)(t-1)}$$

問3

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 7-2\cdot 3}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$(B \mid E_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{②-3① \\ ③+①}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[\substack{①-3\times③ \\ ②+3\times③}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[③+②]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

よって

$$A^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}}$$

$$(C \,\vdots\, E_4) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{2-1 \\ 3+1 \\ 4-1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{1-2 \\ 3+2 \\ 4-2}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{1+3 \\ 2+3 \\ 4-3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{①+5④ \\ ②+10④ \\ ③+6④}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -10 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -18 & -9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -4 & 5 \\ -1 & -18 & -9 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

問5

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{②-① \\ ③-2①}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1列を軸に展開

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{1}$$

(2)

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-2 = \underline{2}$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = \underline{1}$$

(3)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

数C 午前クラス

問1.

$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$|B| = -3$

$|C| = 2$

問2. $\cancel{|A| = t^2 - 3t + 3}$

$|B| = (t+1)(t-1)(t-2).$

問3

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -4 & 5 \\ -1 & -18 & -9 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

問4.

(1) $|A| = 1$

(2) $|A_{1,2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$

$|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A^{-1} = \widetilde{A}$!!