数学C・中間試験予想？(平成２９年１２月１３日)

問１．（１）$1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。

（２）$(1+\sqrt{3}i)^{12}$ をもとめよ。

問２．　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。

（１）$A+B$

（２）$2A-3C$

（３）ABC

問３．　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ。

（１）P^{-1}

（２）$P^{-1}AP$

（３）$A^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

問４．　次の行列のランクを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

問５　次の１次方程式系を解け。

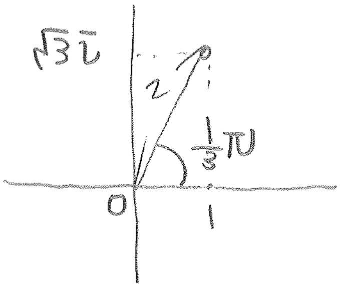
$$(1)\quad \left(\begin{array}{c} x_1+x_2+2x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-x_4=-1 \\ -x_1+x_2+x_4=1 \end{array} \right. , \qquad (2)\quad \left(\begin{array}{c} 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1-x_2-x_3-2x_{\underset{4}{=}}-1 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{array} \right. .$$

（解答例）

問1.

(1) $1+\sqrt{3}i$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



(2) $(1+\sqrt{3}i)^{12}$

$$= 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2^{12} = 4096$$

問2.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$

(2) $2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}$$

問3

(1) $P^{-1} = \frac{1}{1+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) $P^{-1}AP$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$

(3) (2)を用いる.

$$\underbrace{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}_{n} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

一方、 $P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP$

$= P^{-1}A^nP$

よって、

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n+(-2)^n & 4^n-(-2)^n \\ 4^n-(-2)^n & 4^n+(-2)^n \end{pmatrix}}$$

問4. 行列のランク.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-2&2\\2&1&1\end{pmatrix}\xmapsto[\substack{\textcircled{1}-2\times\textcircled{2}\\ \textcircled{3}-2\times\textcircled{2}}]{}\begin{pmatrix}0&5&-5\\1&-2&2\\0&5&-3\end{pmatrix}\xmapsto[\textcircled{1}\times\frac{1}{5}]{}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-2&2\\0&5&-3\end{pmatrix}\xmapsto[\substack{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}\\ \textcircled{3}-3\times\textcircled{1}}]{}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\xmapsto[\substack{\textcircled{3}\times\frac{1}{2}\\ \text{など}}]{}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

よってランクは $\underline{3}$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&4&2\\2&-1&-1&1\\-1&1&2&0\end{pmatrix}\xmapsto[\substack{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}\\ \textcircled{3}+\textcircled{1}}]{}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&-3&-9&-3\\0&2&6&2\end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{\textcircled{2}\times(-\frac{1}{3})\\ \textcircled{3}\times(\frac{1}{2})}]{}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&1&3&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}\xmapsto[\textcircled{3}-\textcircled{2}]{}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\textcircled{1}-\textcircled{2}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よってランクは $\underline{2}$

問5、

(1) 拡大係数行列を変形する.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-① \\ ③-2\times① \\ ④+①}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{④-2\times② \\ \text{ののち} \\ ④\times\frac{1}{2}}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-④ \\ ③+4\times④}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-2\times② \\ ③+2\times②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②+③}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

よって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{② - 2\times① \\ ③ + ① \\ ④ - ①}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[④\times(-\frac{1}{2})]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{① - 3\times④ \\ ② + 4\times④ \\ ③ - 2\times④}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[① - 2③]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①\times\frac{1}{2} \\ \text{など}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = \frac{1}{2} \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = t$ とすると

$$\left(\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{array}\right.$$

(t: 任意)