微積分解法２０１７　期末試験（７月２８日（金））午後クラス

問１ 20 次の関数の導関数を求めよ。

10×2
$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(2x) + \sqrt{1-4x^2}, \qquad g(x) = x^{\log x}.$$

問２ 10 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

問３ 30 次の関数の原始関数を求めよ。

15×2
$$f(x) = x\cos x, \qquad g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

26 問４ 有理関数 $R(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ に関する以下の問いに答えよ。

（１） $R(x)$ の部分分数展開を求めよ。 16

（２） 原始関数 $\int R(x)dx$ を求めよ。 10

10 問５ 次の原始関数を求めよ。

$$\int \frac{1}{a\cos^2 x - b\sin^2 x} dx \quad (a, b > 0).$$

ヒント：$t = \tan x$ とおく。

10 問６ 次の変数分離型微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^2 y\ \tan y}{\cos^2 x\ \tan x}.$$

解答例

問1.

・$f(x) = \mathrm{Arcsin}(2x) + \sqrt{1-4x^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{1}{2}\frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \frac{2(1-2x)}{\sqrt{1-4x^2}} = \underline{2\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}}$$

・$g(x) = x^{\log x} = e^{\log x \cdot \log x} = e^{(\log x)^2}$

$$g'(x) = e^{(\log x)^2}((\log x)^2)'$$

$$= x^{\log x} \times 2\log x \times \frac{1}{x}$$

$$= \underline{2x^{\log x - 1} \cdot \log x}$$

問3.

$\boxed{\text{問2はうしろ}}$

・$\int x\cos x\,dx$

$f = x \quad , f' = 1$

$g' = \cos x \quad , g = \sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= \underline{x\sin x + \cos x + C}$$

・$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

$t = \sin x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \cos x$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{dx}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(t) + C$$

$$= \underline{\mathrm{Arctan}(\sin x) + C}$$

問4.

(1) $$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

両辺に $x(x^2+1)$ をかける.

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$
$$= (A+B)x^2 + Cx + A$$

$A=1,\ C=0,\ A+B=0$ より

$$A=1,\ B=-1,\ C=0$$

よって $$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

(2)
$$\int R(x)\,dx$$
$$= \underline{\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C}$$

問9.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= \int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$= 1+1 = \underline{2}$$

問5.

$$t = \tan x$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$I = \int \frac{1}{a\cos^2 x - b\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{a - b\tan^2 x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{a - bt^2}$$

$$\frac{1}{a-bt^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}-t} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+t}\right)$$

であるから.

$$I = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}-t} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(-\log\left|\sqrt{\frac{a}{b}}-t\right| + \log\left|\sqrt{\frac{a}{b}}+t\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+\tan x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-\tan x}\right| + C$$

問6

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^2 y \cdot \tan y}{\cos^2 x \cdot \tan x}$$

$$-\frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\tan y \cdot \cos^2 y}\frac{dy}{dx}$$

$$+\int \frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{-1}{\tan y \cdot \cos^2 y}\,dy \quad —(※)$$

左辺で　$t = \tan x$ とおくと

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので

$$\int \frac{1}{\tan x \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{t}\frac{dt}{dx}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C'$$

$$= \log|\tan x| + C'$$

よって(※)は、

$$\log|\tan x| = -\log|\tan y| + C''$$

$$\log|\tan x \tan y| = C''$$

よって　$\tan x \cdot \tan y = C$