微積分解法２０１７　期末試験（７月２８日（金））午前クラス

20

問１　次の関数の導関数を求めよ。

$$f(x) = \log(\log(\sin x)), \qquad g(x) = x^x.$$

10　10

10

問２ 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

30

問３ 次の関数の原始関数を求めよ。

$$f(x) = \log x, \qquad g(x) = \frac{1}{\tan x}.$$

15　15

20

問４ 有理関数 $R(x) = \frac{2x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ に関する以下の問いに答えよ。

（１）$R(x)$ の部分分数展開を求めよ。 10

（２）原始関数 $\int R(x)dx$ を求めよ。 10

10

問５ 次の原始関数を求めよ。

$$\int \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} dx \quad (a, b > 0).$$

ヒント：$t = \tan x$ とおく。

10

問６ 次の変数分離型微分方程式を解け。

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

解答例

問1

・$f(x) = \log(\log(\sin x))$

$$f'(x) = \frac{1}{\log(\sin x)} \times \frac{1}{\sin x} (\sin x)'$$

$$= \underline{\frac{\cos x}{\sin x \cdot \log(\sin x)}}$$

・$g(x) = x^x = e^{x \log x}$

$$g'(x) = e^{x \log x} (x \log x)'$$

$$= e^{x \log x} \left(\log x + x \frac{1}{x} \right)$$

$$= \underline{x^x (\log x + 1)}$$

問3. $\boxed{\text{問2はうしろ}}$

$$\int \log x \, dx \qquad \begin{cases} f = \log x \\ g' = 1 \end{cases} \begin{cases} f' = 1/x \\ g = x \end{cases}$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = \underline{x \log x - x + C}$$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$t = \sin x$ とおくと. $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{dx} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C$$

$$= \underline{\log|\sin x| + C}$$

問4

(1) $R(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-3}$

両辺に $(x-1)(x-2)(x-3)$ をかける、

$$2x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

・$x=1$ を代入。

$$2 = A(-1)(-2) \qquad \therefore A = 1$$

・$x=2$ を代入

$$4 = B(2-1)(2-3) = -B \qquad \therefore B = -4$$

・$x=3$ を代入

$$6 = C(3-1)(3-2) = 2C \qquad \therefore C = 3$$

$$R(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

(2)

$$\int R(x)\,dx = \log|x-1| - 4\log|x-2| + 3\log|x-3| + C$$

$$= \log\left|\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^4}\right| + C$$

問5.　$t = \tan x$ とおく.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$I = \int \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{a + b\tan^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{a+bt^2}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}t\right)^2}\,dt$$

$s = \sqrt{\frac{b}{a}}t$ とおく.

$$ds = \sqrt{\frac{b}{a}}\,dt$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \frac{1}{1+s^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\mathrm{Arctan}(s) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x\right) + C$$

④

問6.

$$x^2\frac{dy}{dx}+y^2=0$$

$$-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}dy$$

$$-\int\frac{1}{x^2}dx=\int\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{1}{y^2}dy$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+C$$

$$\therefore\ \underline{Cxy+x+y=0}$$

問2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\underline{\frac{2}{3}}$$