微積分解法２０１７　中間試験（６月２３日（金））午後クラス

問１　次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n+1}, \qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

問２　次の極限値をもとめなさい。

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}.$$

問３　関数 $f(x)=|x|$ は点 $x=0$ で微分可能ではないことを示しなさい。

問４　次の関数の導関数を求めよ。

$$(1)\quad f(x)=x\ \mathrm{Arctan}\ x,$$
$$(2)\quad g(x)=(\tan x)^{\sin x},$$
$$(3)\quad h(x)=x\log(x^2+2).$$

問５　関数 $f(x)=\sqrt{1-x+x^2}$ の $x=0$ における３次のテーラー級数を求めよ。つまり、次の a_0,a_1,a_2,a_3 を求めよ。

$$\sqrt{1-x+x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$$

問６　次の関数 $f(x)$ の n 次導関数を求めよ。ただし、$n=1,2,3,\cdots$.

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)(x+a)}\quad (a\neq 0).$$

ヒント：$\frac{1}{(x-b)(x-c)}=\frac{1}{b-c}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}\right)\quad (b\neq c)$.

中間テスト解答

問1. (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\underline{5}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\underline{1}$$

問2.

$x=-1+t$ とおくと、

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}=\lim_{t\to+0}\frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}=\underline{-\infty}$$

問3.

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}=-1$$

右極限と左極限が相異なる. よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$ は存在しない.

つまり 微分できない.

問4. (1) $f'(x) = \mathrm{Arctan}\, x + \dfrac{x}{1+x^2}$

(2) $g(x) = e^{\sin x \log \tan x}$

$$g'(x) = (\tan x)^{\sin x} (\sin x \cdot \log \tan x)'$$

$$= (\tan x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \log \tan x + \sin x \cdot \frac{1}{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= (\tan x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \log \tan x + \frac{1}{\cos x} \right)$$

(3) $h'(x) = \log(x^2+2) + x \dfrac{2x}{x^2+2}$

$$= \log(x^2+2) + \frac{2x^2}{x^2+2}$$

問5.

$f(x) = \sqrt{1-x+x^2}$

$g(y) = \sqrt{1-y}$, $y = x - x^2 = x(1-x)$

$$g'(y) = \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-y}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-y}}$$

$$g''(y) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)(1-y)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(1-y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g'''(y) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-y)^{-\frac{5}{2}} \times (-1) = -\frac{3}{8}(1-y)^{-\frac{5}{2}}$$

$$g(y) = 1 - \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \frac{1}{2!} y^2 - \frac{3}{8} \times \frac{1}{3!} y^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 - \frac{1}{16} y^3 + \cdots$$

($y^2 = x^2(1-x)^2 = x^2(1-2x+x^2) = x^2 - 2x^3 + \cdots$
$y^3 = x^3(1-x)^3 = x^3 + \cdots$ を代入すると.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - x^2) - \frac{1}{8}(x^2 - 2x^3 + \cdots) - \frac{1}{16}x^3 + \cdots = \underline{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \cdots}$$

問5

$$f(x)=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{(x-a)^2}-\frac{-1}{(x+a)^2}\right)$$

$$f''(x)=\frac{1}{2a}\left(\frac{(-1)(-2)}{(x-a)^3}-\frac{(-1)(-2)}{(x+a)^3}\right)=\frac{(-1)^2 2!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^3}-\frac{1}{(x+a)^3}\right)$$

$$\underline{f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)} \quad \cdots(☆)$$

が予想される。

$n=1$ について (☆) が成立。

ある n まで (☆) が正しいと仮定すると、

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\
&= \left(\frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)\right)' \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{-(n+1)}{(x-a)^{n+2}}-\frac{-(n+1)}{(x+a)^{n+2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+2}}-\frac{1}{(x+a)^{n+2}}\right)
\end{aligned}$$

よって帰納法により (☆) が成立。