微積分解法２０１７　中間試験（６月２３日（金））午前クラス

問１　次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-2}, \qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}).$$

問２　次の極限値をもとめなさい。

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+25}}.$$

問３　次の関数 $f(x)$ が点 $x=0$ で連続であるかを調べなさい。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}.$$

問４　次の関数の導関数を求めよ。

$$(1)\quad f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x+\sqrt{1-x^2},$$
$$(2)\quad g(x)=x^{\sin x},$$
$$(3)\quad h(x)=\cos(2x^2+x-2).$$

問５　関数 $f(x)=\log(1-2x-3x^2)$ の $x=0$ における３次のテーラー級数を求めよ。つまり、次の a_0,a_1,a_2,a_3 を求めよ。

$$\log(1-2x-3x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$$

問６　次の関数 $f(x)$ の n 次導関数を求めよ。ただし、$n=1,2,3,\cdots$.

$$f(x)=xe^x.$$

中間テスト解答

問1.（1）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}=\underline{\frac{1}{3}}$$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\underline{1}$$

問2.

$$\frac{(x-5)}{\sqrt{(x^2-10x+25)}}$$

$$=\frac{(x-5)}{\sqrt{(x-5)^2}}=\frac{x-5}{|x-5|}$$

$x=5-t$ とすると、

$$\lim_{x\to5-0}\frac{x-5}{|x-5|}=\lim_{t\to+0}\frac{-t}{|t|}=\underline{-1}.$$

問3

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x-x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x-|x|}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{-t-t}{-t}=2$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$ は存在しない。

$f(x)$ は $x=0$ で不連続

問4

(1) $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \underline{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

(2) $$g(x) = \exp(\sin x \cdot \log x)$$
$$g'(x) = x^{\sin x}(\sin x \cdot \log x)'$$
$$= \underline{x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \log x + \frac{1}{x}\sin x\right)}$$

(3) $$h'(x) = -\sin(2x^2+x-2) \times (2x^2+x-2)'$$
$$= \underline{-(4x+1)\sin(2x^2+x-2)}$$

問5

$\log(1-y)$ のテーラー級数は、

$$\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \cdots.$$

$y = 2x+3x^2$ を代入すると、

$$y^2 = x^2(2+3x)^2 = x^2(9x^2+12x+4) = 4x^2+12x^3+\cdots$$
$$y^3 = x^3(2+3x)^3 = x^3(8+\cdots) = 8x^3+\cdots$$

よって

$$\log(1-2x-3x^2) = -2x-3x^2 - \frac{1}{2}(4x^2+12x^3+\cdots)$$
$$-\frac{1}{3}(8x^3+\cdots)$$
$$= -2x + (-3-2)x^2 + \left(-6-\frac{8}{3}\right)x^3 + \cdots$$
$$= -2x - 5x^2 - \frac{26}{3}x^3 + \cdots$$

問6.

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = (1+x)e^x$

$f''(x) = (1+1+x)e^x = (2+x)e^x$

$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ と予想される …(※)

(※)は $n=1$ のとき成立.

ある n まで(※)が正しいと仮定すると,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$
$$= ((n+x)e^x)'$$
$$= (n+x+1)e^x = \{(n+1)+1\}e^x.$$

帰納法により

$$\underline{f^{(n)}(x) = (n+x)e^x}$$