

微積分解法 2016 期末試験 (午後クラス)

問1 次の関数の不定積分を求めなさい。

30

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x \log x}, \quad \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

問2 有理関数 $R(x) = \frac{2x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ に関する以下の問いに答えよ。

25

(1) $R(x)$ の部分分数展開を求めよ。

15

(2) 原始関数 $\int R(x)dx$ を求めよ。

10

問3 次の不定積分を求めなさい。

15

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

ヒント：変数変換 $t = \tan x$ を行う。

問4 次の微分方程式の一般解を求めよ。

15

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tan x}{\tan y}$$

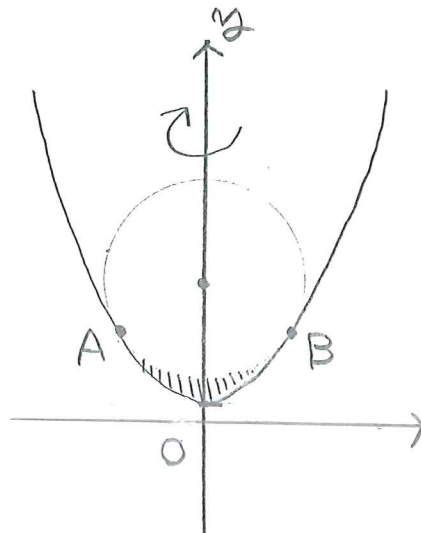
問5 xy 平面上に、放物線 $C_1: y = x^2 + \frac{1}{4}$ と円 $C_2: x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$ がある。 C_1, C_2 は2つの共有点 A, B において共通の接線をもつ。

15

(1) A, B の座標を求めよ。

10

(2) C_1 と C_2 で囲まれる部分を、 y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。



5

(解答)

①

問1.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\text{Arctan } x + C}$$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx \quad t = \log x \text{ とおく}$$

$$= \int \frac{1}{t} \frac{dt}{dx} dt \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C = \underline{\log |\log x| + C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} dx \quad y = \frac{x}{3}$$

$$dy = \frac{1}{3} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \underline{\text{Arcsin } y + C = \text{Arcsin} \left(\frac{x}{3} \right) + C}$$

問2. (1) 部分分数展開は、

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

両辺に $(x-1)(x-2)(x-3)$ をかける。

$$2x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

• $x=1$ を代入

$$2 = A(-1)(-2) \quad \therefore A = 1$$

• $x=2$ を代入

$$4 = B(2-1)(2-3) \quad \therefore B = -4$$

• $x=3$ を代入

$$6 = C(3-1)(3-2) \quad \therefore C = 3$$

よって

$$R(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

(2)

$$\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx$$

$$= \log|x-1| - 4\log|x-2| + 3\log|x-3|$$

$$= \log \left| \frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^4} \right| + C$$

問3.

$$t = \tan x \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx \\ &= \int t^3 \frac{dt}{dx} dx \\ &= \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} \tan^4 x + C}} \end{aligned}$$

問4.

$$\tan y \frac{dy}{dx} = -\tan x$$

両辺を x の積分する。

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$-\log |\cos y| = \log |\cos x| + C$$

$$\log |\cos x \cos y| = \log e^{-C}$$

e^{-C} を新たに C とおけば

$$\underline{\underline{\cos x \cdot \cos y = C}}$$

問5

(4)

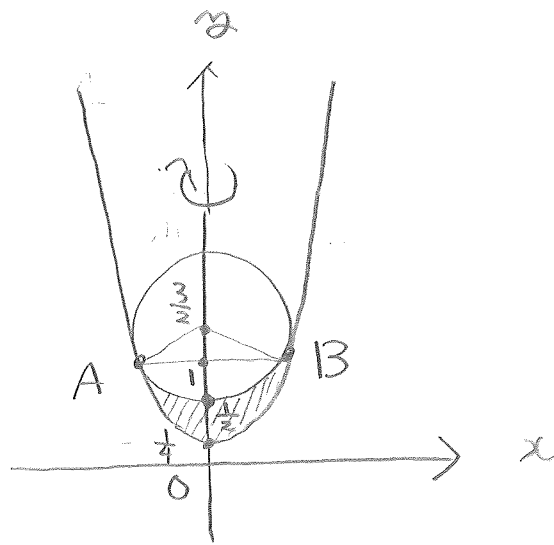
$$(1) \quad y = x^2 + \frac{1}{4} \quad \text{と} \quad x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{を連立すると、} \quad y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \therefore y = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{A \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)}$$

(2)



$$V = \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\sqrt{y - \frac{1}{4}}\right)^2 dy - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \sqrt{1 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} \right\}^2 dy$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(y - \frac{1}{4}\right) dy - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2\right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y \right]_{\frac{1}{4}}^1 + \pi \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{4}y \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{9}{32}\pi + \frac{5}{24}\pi = \underline{\underline{\frac{7}{96}\pi}}$$