

微積分解法 2016 期末試験 (午前クラス)

問1 次の関数の不定積分を求めなさい。

30

$$\cos^2 x, \quad \frac{x}{x^2+1}, \quad x \log x.$$

問2 有理関数  $R(x) = \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$  に関する以下の問いに答えよ。

25

(1)  $R(x)$  の部分分数展開を求めよ。

15

(2) 不定積分  $\int R(x)dx$  を求めよ。

10

問3 次の不定積分を求めなさい。

15

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

ヒント:  $t = \tan 2x$  とおく。

問4 次の微分方程式の一般解を求めよ。

15

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

問5  $xy$  平面において、次の連立不等式の表す領域を  $D$  とする。

15

$$0 \leq y \leq \text{Max}(\sin x, \sin 2x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$D$  を  $x$  軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を  $V$  とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $xy$  平面上に  $D$  を図示しなさい。

10

(2)  $V$  を求めよ。

5

(解答例)

①

問1.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C}}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log(x^2+1) + C}}$$

$$\int x \log x \, dx \quad \begin{array}{ll} u = \log x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{1}{2} x^2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x \, dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C}}$$

問2.

(1) 部分分数展開は、

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

両辺に  $x(x-1)^3$  をかけると、

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

•  $x=0$  を代入すると、

$$1 = -A \quad \therefore A = -1$$

•  $x=1$  を代入すると、

$$2 = D$$

•  $x^3$ の係数を比較すると、

$$1 = A + B \quad \therefore B = 2$$

•  $x^2$ の係数を比較すると、

$$0 = -3A - 2B + C$$

$$A = -1, B = 2 \text{ を } A \text{ に代入すると } C = 1$$

$$\text{連立すると、 } C = 1$$

まとめ、

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$


---

$$(2) \int R(x) dx$$

$$= \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx$$

$$= -\log|x| + 2\log|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

$$= \log \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$


---

問3.

3

$$t = \tan 2x \quad (\text{おけば})$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

よって

$$I = \int \frac{4}{\sin^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{2}{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}} \times \frac{2}{\cos^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{2}{t^2} dt = -\frac{2}{t} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{\tan 2x} + C}}$$

問4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

両辺を  $x$  で積分すると、

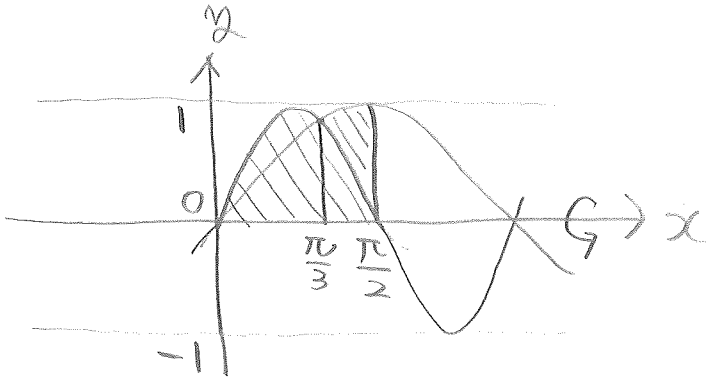
$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\underline{\underline{\text{Arctan } y = \text{Arctan } x + C}}$$

問5

④

(1)



$y = \sin x$ ,  $\times y = \sin 2x = 2\sin x \cos x$   
を連立すると、

$$2\sin x \left( \cos x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  において

$$\begin{cases} \sin x = 0 & \Leftrightarrow x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

よって、 $y = \sin x$   $\times y = \sin 2x$  の共有点は  $x = 0, \frac{\pi}{3}$

D を図示すれば上図のようになる。

(2)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x \, dx + \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{3}{16} \sqrt{3} \pi \end{aligned}$$