微積分解法２０１６　中間試験（６月１７日（金））

問１　次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+3}{-3n^3+2n+5}, \qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n}.$$

問２　次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x}, \qquad (2)\quad \lim_{x\to 2-0}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}.$$

問３　次の関数 $f(x)$ が点 $x=2$ で連続であることを示しなさい。

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & (x\neq 2), \\ 3 & (x=2). \end{cases}$$

問４　関数 $f(x), g(x)$ を次で定義する。

$$f(x)=\mathrm{Arctan}(x^2), \qquad g(x)=x^2e^x.$$

（１）関数 $f(x), g(x)$ の導関数 $f'(x), g'(x)$ を求めなさい。

（２）関数 $f(x), g(x)$ の２次導関数 $f''(x), g''(x)$ を求めなさい。

問５　関数 $f(x)=\log(1-x)$, $g(x)=\log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ について以下の問いに答えなさい。

（１）関数 $f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$.

（２）関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。

（３）関数 $g(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。

（解答例）

問1.

(1) $$\frac{n^3-2n+3}{-3n^3+2n+5}=\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{-3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}\to\underline{-\frac{1}{3}}\quad(n\to\infty)$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n}=\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n^2+3-n^2}=\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3}\longrightarrow\infty\quad(n\to\infty)$$

問2

(1) $$\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\longrightarrow 0\quad(x\to\infty)$$

(2) $$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$x<2$ なので $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$

よって

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{x-2}{2-x}=-1$$

よって

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=-1$$

問3、

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)}=x+1$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3$

つまり $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=3=f(2)$

つまり $f(x)$ は $x=2$ で連続。

問4、

(1) $f(x)=\mathrm{Arctan}\,(x^2)$

$$f'(x)=\frac{(x^2)'}{1+x^4}=\underline{\frac{2x}{1+x^4}}$$

$$g(x)=x^2e^x$$

$$g'(x)=2xe^x+x^2e^x$$

$$=\underline{x(2+x)e^x}$$

(2)

$$f''(x)=\frac{2(1+x^4)-2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$=\underline{\frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}}$$

$$g''(x)=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x$$

$$=\underline{(2+4x+x^2)e^x}$$

③

問5.

(1) $f(x)=\log(1-x)$

$f'(x)=\frac{-1}{1-x}$

$f''(x)=\frac{-1}{(1-x)^2}$

$f^{(3)}(x)=-\frac{2}{(1-x)^3}$

$f^{(4)}(x)=-\frac{3\cdot 2}{(1-x)^4}$

$\vdots$

$\underline{f^{(n)}(x)=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad (n\geq 1)}$

(2)

$f^{(n)}(0)=-(n-1)! \quad (n\geq 1),\ f(0)=0$

よって $\log(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n!}x^n$

$\underline{=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n}$

(3) (2)を用いる.

$g(x)=\log(1-x^2)-\log(1+x^2)$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n}$

$=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}x^{4m+2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}x^{4m}$

$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}x^{4m+2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}x^{4m}$

$\underline{=-2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}x^{4m+2}}$